



MAPAS DE PROGRESO DEL APRENDIZAJE

## **MATEMÁTICA: Cambio y relaciones**

*Propone y usa modelos coherentes en la resolución de situaciones problemáticas de regularidad, equivalencia y cambio que impliquen desarrollar patrones y establecer relaciones, empleando diversas formas de representación y lenguaje simbólico.*



PERÚ

Ministerio  
de Educación

**ipeba**

INSTITUTO PERUANO DE EVALUACIÓN,  
ACREDITACIÓN Y CERTIFICACIÓN DE LA  
CALIDAD DE LA EDUCACIÓN BÁSICA



**MAPAS DE  
PROGRESO DEL  
APRENDIZAJE**

*nuestros estándares  
nacionales de aprendizaje*

***MATEMÁTICA:  
Cambio y relaciones***



INSTITUTO PERUANO DE EVALUACIÓN,  
ACREDITACIÓN Y CERTIFICACIÓN DE LA  
CALIDAD DE LA EDUCACIÓN BÁSICA

**Directorio:**

Peregrina Morgan Lora (Presidenta)  
Jorge Castro León  
Liliana Miranda Molina  
Angélica Montané Lores  
Carlos Rainusso Yáñez

**Comisión Directiva Estándares de Aprendizaje**

Patricia Andrade Pacora  
Liliana Miranda Molina  
Peregrina Morgan Lora

**Coordinación Técnica:**

Verónica Alvarado Bonhote

**Equipo Técnico Responsable:**

**IPEBA - PROGRAMA ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE**

**Coordinación General**

Cecilia Zevallos Atoche (Coordinadora General)  
Alfredo Altamirano Izquierdo  
Lilian Isidro Cámac

**Asesora Nacional**

Jessica Tapia Soriano

**Equipo de Matemática**

Cecilia Zevallos Atoche  
Pilar Butrón Casas  
Lilian Isidro Cámac  
Patricia Paz Huamán

**Asesor de Matemática**

Claudio Tapia Fuentes

**MINISTERIO DE EDUCACIÓN**

**Dirección General de Educación Básica Regular**

María Isabel Díaz Maguina  
Gabriela Rodríguez Cabezudo  
Roger Saavedra Salas

**Dirección de Educación Superior Pedagógica**

Raúl Hilares Trujillo

**Dirección General de Educación Intercultural, Bilingüe y Rural**

Marta Villavicencio Ubillús

**Unidad de Medición de la Calidad Educativa**

Olimpia Castro Mora  
Miriam Arias Reyes

**Comisión de Expertos**

Teresa Arellano Bados  
Úrsula Asmad Falcón  
Lileya Manrique Villavicencio  
Antonieta Ramírez de Ferro  
María Elena Marcos Nicho  
Guillermo García Figueroa

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2013-11912  
ISBN 978-612-46406-4-3

**Diseño:** Rubén Colonia

**Tiraje:** 13 000 ejemplares  
Lima, setiembre de 2013

**Impresión:** Centro de Producción Editorial e Imprenta de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (CEPREDIM)

© Sistema Nacional de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad Educativa - SINEACE

© Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica (IPEBA).

Calle Ricardo Angulo 266, San Isidro. Lima 27. Perú.

Teléfonos: / (51-1) 223-2895, Fax: (51-1) 224-7123 anexo 112

E-mail: [cir@ipeba.gob.pe](mailto:cir@ipeba.gob.pe) / [www.ipeba.gob.pe](http://www.ipeba.gob.pe)

Se autoriza la reproducción total o parcial siempre y cuando se mencione la fuente.

# ÍNDICE

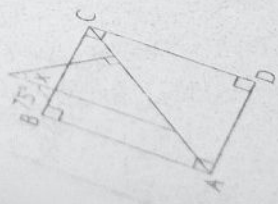
<b>Presentación</b> .....	<b>5</b>
<b>Mapas de Progreso de Matemática</b> .....	<b>7</b>
<b>El Mapa de Progreso de Cambio y Relaciones</b> .....	<b>8</b>
<b>Previo</b> .....	<b>10</b>
Ejemplos de indicadores de desempeño y trabajos de estudiantes	
<b>III Ciclo</b> .....	<b>13</b>
Ejemplos de indicadores de desempeño y trabajos de estudiantes	
<b>IV Ciclo</b> .....	<b>16</b>
Ejemplos de indicadores de desempeño y trabajos de estudiantes	
<b>V Ciclo</b> .....	<b>21</b>
Ejemplos de indicadores de desempeño y trabajos de estudiantes	
<b>VI Ciclo</b> .....	<b>26</b>
Ejemplos de indicadores de desempeño y trabajos de estudiantes	
<b>VII Ciclo</b> .....	<b>31</b>
Ejemplos de indicadores de desempeño y trabajos de estudiantes	
<b>Destacado</b> .....	<b>36</b>
Ejemplos de indicadores de desempeño y trabajos de estudiantes	
<b>Glosario</b> .....	<b>40</b>
<b>Referencias bibliográficas</b> .....	<b>42</b>



$x = 126$

Problema 5 Resp:  $x = 126$

En el cuadrado ABCD, calcular  $x$ .



Resolución

Problema 6

En el cuadrado ABCD, calcular  $x$ .

Resp:  $x =$

# PRESENTACIÓN

Garantizar el derecho a la educación es un compromiso por la formación integral de los estudiantes. Para ello, es necesario que logren los aprendizajes esperados durante su trayectoria escolar. El Ministerio de Educación y el Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica – IPEBA, en un trabajo conjunto, están elaborando los Mapas de Progreso del Aprendizaje, como una herramienta que coadyuve a mejorar la calidad del servicio que ofrecen las instituciones educativas, públicas y privadas, a los estudiantes del país.

Con este propósito se está desarrollando un sistema curricular destinado a asegurar los aprendizajes que requieren los niños, niñas y adolescentes en el país, y a orientar la labor de los docentes en las aulas. Dicho sistema está compuesto, básicamente, por el Marco Curricular, los Mapas de Progreso y las Rutas de Aprendizaje, y se constituye en el orientador y articulador de los Currículos Regionales.

El Marco Curricular comprende el conjunto de aprendizajes fundamentales que todos deben alcanzar en la educación básica. Los Mapas de Progreso describen con precisión lo que los estudiantes deben saber, saber hacer y valorar, de manera graduada en cada ciclo de la educación básica, y ofrecen criterios claros y comunes para monitorear y evaluar dichos aprendizajes. Las Rutas del Aprendizaje apoyan la labor de los docentes y orientan sus estrategias específicas de enseñanza con el fin de favorecer el aprendizaje.

Considerando que el aprendizaje es un proceso continuo, que se desarrolla a lo largo de la vida, los Mapas de Progreso posibilitan apreciar el avance progresivo de tal aprendizaje, facilitando la articulación de los niveles y etapas del sistema educativo pero, sobre todo, el acompañamiento de los logros de los estudiantes, para que todos puedan aprender y nadie se quede atrás.

La elaboración de los Mapas de Progreso se realiza en un equipo integrado por especialistas de IPEBA y del Ministerio de Educación, que son asesorados por expertos nacionales e internacionales. Este proceso comprende el recojo de información a través de pruebas a estudiantes de diferentes regiones del país, así como consultas a docentes, formadores y acompañantes de docentes, y a especialistas de Direcciones Regionales de Educación y Unidades de Gestión Educativa Local. Además, se trabaja sobre la base de una amplia revisión bibliográfica de experiencias internacionales y la revisión y análisis de los resultados de las evaluaciones nacionales e internacionales aplicadas a estudiantes peruanos. Finalmente, los Mapas de Progreso son validados por una comisión de expertos, constituida por profesionales de gran prestigio académico, amplia experiencia y conocimiento de las distintas competencias que deben desarrollar los estudiantes.

Los Mapas de Progreso serán entregados a los docentes a través de fascículos coleccionables que faciliten su buen uso.

Este fascículo se propone que autoridades, docentes, estudiantes, padres y madres de familia, así como organizaciones de base, conozcan el Mapa de Progreso de Cambio y Relaciones (Matemática) atendiendo a que “la sociedad tiene la responsabilidad de contribuir a la educación y el derecho a participar en su desarrollo” (Ley General de Educación, artículo 3°).

**Patricia Salas O’Brien**  
Ministra de Educación

**Peregrina Morgan Lora**  
Presidenta Directorio IPEBA

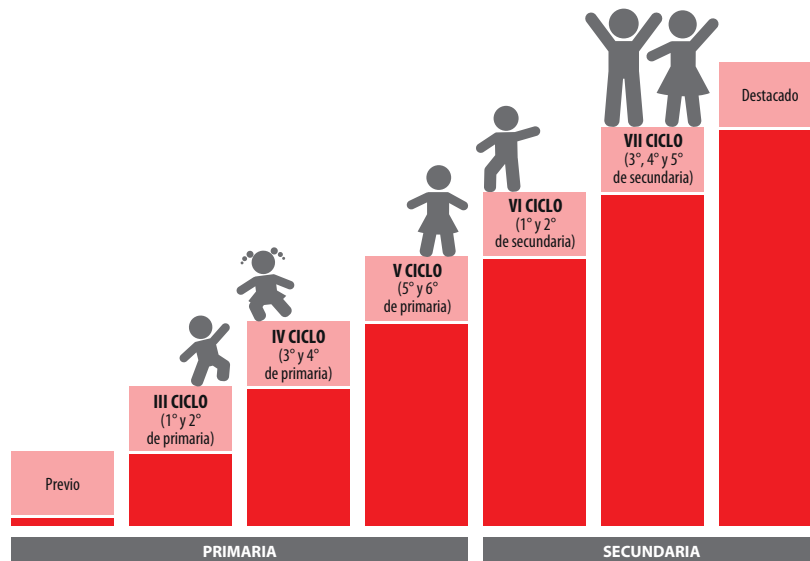
## ¿Qué son los estándares de aprendizaje nacionales?

Son metas de aprendizaje claras que se espera que alcancen todos los estudiantes del país a lo largo de su escolaridad básica. Los estándares son una de las herramientas que contribuirán a lograr la ansiada calidad y equidad del sistema educativo peruano, el cual debe asegurar que todos los niños, niñas y jóvenes del país, de cualquier contexto socioeconómico o cultural, logren los aprendizajes fundamentales.

En el Perú, se ha decidido elaborar los estándares nacionales de aprendizaje poniendo especial interés en describir cómo suelen progresar de ciclo a ciclo las distintas competencias. Por tal razón, han sido formulados como MAPAS DE PROGRESO DEL APRENDIZAJE.

## ¿Cuál es la estructura de un Mapa de Progreso del Aprendizaje?

El MAPA DE PROGRESO está dividido en niveles. Los niveles indican lo que se espera que un estudiante haya aprendido al finalizar cada ciclo de la Educación Básica Regular. Los niveles muestran estos aprendizajes de manera sintética y empleando un lenguaje sencillo, con el fin de que todos puedan comprenderlos.



Cada nivel del MAPA DE PROGRESO cuenta con un conjunto de indicadores de desempeño. Estos permitirán identificar claramente si los estudiantes lograron lo que indica el nivel correspondiente. Adicionalmente, el MAPA DE PROGRESO incluye ejemplos de trabajos de estudiantes que han logrado lo señalado en cada nivel.

## ¿Por qué son útiles los Mapas de Progreso del Aprendizaje?

Los Mapas de Progreso son útiles porque le permiten al docente enfocarse en los aprendizajes centrales y observar cuán lejos o cerca están sus estudiantes del logro de estas metas de aprendizaje, para poder reorientar su acción pedagógica.

# MAPAS DE PROGRESO DE MATEMÁTICA

La velocidad del desarrollo científico y tecnológico demanda de la persona una serie de competencias para enfrentar los retos de un mundo en constante cambio. Así, para hacer frente a esta realidad, se requieren, entre otras competencias, aquellas vinculadas a los aprendizajes matemáticos. La Matemática desarrolla en el estudiante competencias que le permitan *plantear y resolver con actitud analítica los problemas de su contexto y de la realidad*<sup>1</sup>, de manera que pueda usar esas competencias matemáticas con flexibilidad en distintas situaciones.

Las competencias de Matemática se han organizado en cuatro Mapas de Progreso:

- Número y operaciones
- Cambio y relaciones
- Geometría
- Estadística y probabilidad

Los Mapas de Progreso de Matemática describen el desarrollo de las competencias que requiere un ciudadano para atender las necesidades y retos de la sociedad actual. El desarrollo de estas competencias se interrelaciona y complementa en la medida en que los estudiantes tengan la oportunidad de aprender matemática en contextos significativos.

Los Mapas de Progreso de Matemática exigen una educación matemática que brinde al estudiante situaciones de aprendizaje problemáticas que lo motiven a comprometerse con la investigación, exploración y construcción de su aprendizaje, y que ponga énfasis en los procesos de construcción de los conceptos matemáticos y en el desarrollo de las competencias matemáticas, que implica que un individuo sea capaz de identificar y comprender el rol que desempeña la matemática en el mundo, para permitir juicios bien fundamentados y para comprometerse con la matemática, de manera que cubra las necesidades de la vida actual y futura de dicho individuo como un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (PISA 2003).

---

<sup>1</sup> Ministerio de Educación del Perú (2008). *Diseño Curricular Nacional*, p. 316.



# EL MAPA DE PROGRESO DE CAMBIO Y RELACIONES

El mundo que nos rodea presenta una multiplicidad de relaciones temporales o permanentes que se manifiestan en los diversos fenómenos naturales, económicos, demográficos, entre otros, los cuales influyen en la vida de todo ciudadano, exigiéndole a este desarrollar un conjunto de capacidades que le permitan comprenderlos, describirlos, analizarlos, modelarlos y realizar predicciones para enfrentarse a los cambios, de manera que se aligeren sus consecuencias o redunden en su beneficio (OCDE, 2006). En este contexto resulta importante el aporte de la Matemática a través de la modelización algebraica, pues permite desarrollar capacidades para analizar las soluciones de un problema, generalizarlas y justificar el alcance de las mismas; a medida que se desarrolla esta capacidad se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo matemático, necesarios para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico por intermedio de las ecuaciones, las variables y las funciones (Godino y Font, 2003).

Por lo antes expuesto, resulta indispensable que desde la educación primaria se ayude a los estudiantes a desarrollar su capacidad para identificar regularidades, comprender el concepto de igualdad y analizar el cambio, situaciones que van incorporando paulatinamente el uso de códigos, símbolos y funciones. Esto significa presentar el Álgebra no solo como un medio de traducción del lenguaje natural al simbólico sino también como una herramienta de modelación de distintas situaciones de la vida real.

El Mapa de Progreso de Cambio y Relaciones describe el desarrollo de la competencia para identificar patrones, describir y caracterizar generalidades, modelar fenómenos reales referidos a las relaciones cambiantes entre dos o más magnitudes, utilizando desde gráficos intuitivos hasta expresiones simbólicas como las igualdades, desigualdades, equivalencias y funciones.

La descripción del progreso del aprendizaje en esta competencia se realiza en base a tres aspectos:

- a) **Interpretación y generalización de patrones.** Implica el desarrollo de capacidades para identificar, interpretar y representar la regularidad existente en diferentes sucesiones a través de una expresión general que modele el comportamiento de sus términos.
- b) **Comprensión y uso de igualdades y desigualdades.** Implica el desarrollo de capacidades para interpretar y representar las condiciones de una situación problemática, mediante igualdades o desigualdades, que permite determinar valores desconocidos y establecer equivalencias entre expresiones algebraicas.
- c) **Comprensión y uso de las relaciones y funciones.** Implica el desarrollo de capacidades para identificar e interpretar las relaciones entre dos magnitudes, analizar la naturaleza del cambio y modelar situaciones o fenómenos del mundo real mediante funciones, con la finalidad de formular y argumentar predicciones.

## Descripción de los niveles del Mapa de Cambio y Relaciones

Previo

Identifica y describe patrones de repetición con un criterio perceptual<sup>2</sup>; completa, representa gráficamente y crea sucesiones con material concreto. Identifica relaciones entre objetos de dos colecciones, a partir de consignas dadas.

**III  
CICLO**  
(1° y 2° de  
primaria)

Identifica patrones aditivos con números naturales de hasta dos cifras y patrones de repetición con dos criterios perceptuales, completa y crea sucesiones gráficas y numéricas y explica si un término pertenece o no pertenece a una sucesión. Interpreta y explica equivalencias entre dos expresiones y sus posibles variaciones en caso se agreguen o quiten cantidades hasta 20 a ambas expresiones, usando material concreto. Determina el valor desconocido en una igualdad entre expresiones que involucran adiciones y sustracciones, y explica su procedimiento. Establece, describe y representa gráficamente relaciones entre objetos de dos colecciones.

**IV  
CICLO**  
(3° y 4° de  
primaria)

Interpreta patrones multiplicativos con números naturales y patrones de repetición que combinan criterios perceptuales y de posición; completa y crea sucesiones gráficas y numéricas; descubre el valor de un término desconocido en una sucesión, comprueba y explica el procedimiento seguido. Interpreta y explica equivalencias entre dos expresiones y sus posibles variaciones en caso se multipliquen o dividan ambos lados de la igualdad, haciendo uso de material concreto y gráfico. Determina el valor desconocido en una igualdad entre expresiones que involucran multiplicaciones o divisiones entre números naturales de hasta dos dígitos, y explica su procedimiento. Identifica y explica relaciones de cambio entre dos magnitudes y relaciones de equivalencia entre unidades de medida de una misma magnitud, y las representa en diagramas o tablas de doble entrada.

**V  
CICLO**  
(5° y 6° de  
primaria)

Interpreta patrones que crecen y decrecen con números naturales, y patrones geométricos que se generan al aplicar traslaciones, reflexiones o giros; completa y crea sucesiones gráficas y numéricas; descubre el valor del término desconocido en una sucesión dado su orden, comprueba y explica el procedimiento seguido. Interpreta que una variable puede representar un valor desconocido en una igualdad. Interpreta cuándo una cantidad cumple con una condición de desigualdad. Representa las condiciones planteadas en una situación problemática mediante ecuaciones con números naturales y las cuatro operaciones básicas; explica el procedimiento seguido. Modela diversas situaciones de cambio mediante relaciones de proporcionalidad directa y relaciones de equivalencia entre unidades de medida de una misma magnitud, las describe y representa en tablas o en el plano cartesiano. Conjetura si la relación entre dos magnitudes es de proporcionalidad directa, comprueba y formula conclusiones.

**VI  
CICLO**  
(1° y 2° de  
secundaria)

Interpreta y crea patrones geométricos que se generan al aplicar traslaciones, reflexiones o rotaciones y progresiones aritméticas con números naturales en las que generaliza y verifica la regla de formación y la suma de sus términos. Interpreta que una variable puede representar también un valor que cambia. Identifica el conjunto de valores que puede tomar un término desconocido para verificar una desigualdad. Representa las condiciones planteadas en una situación problemática mediante ecuaciones lineales; simplifica expresiones algebraicas, comprueba equivalencias y argumenta los procedimientos seguidos. Modela diversas situaciones de cambio mediante relaciones de proporcionalidad inversa, funciones lineales y afines; las describe y representa en tablas, en el plano cartesiano y con expresiones algebraicas. Conjetura cuándo una relación entre dos magnitudes tiene un comportamiento lineal; formula, comprueba y argumenta conclusiones.

**VII  
CICLO**  
(3°, 4° y 5° de  
secundaria)

Generaliza y verifica la regla de formación de progresiones geométricas, sucesiones crecientes y decrecientes con números racionales e irracionales, las utiliza para representar el cambio y formular conjeturas respecto del comportamiento de la sucesión. Representa las condiciones planteadas en una situación mediante ecuaciones cuadráticas, sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones lineales con una variable; usa identidades algebraicas y técnicas de simplificación, comprueba equivalencias y argumenta los procedimientos seguidos. Modela diversas situaciones de cambio mediante funciones cuadráticas, las describe y representa con expresiones algebraicas, en tablas o en el plano cartesiano. Conjetura cuándo una relación entre dos magnitudes puede tener un comportamiento lineal o cuadrático; formula, comprueba y argumenta conclusiones.

Destacado

Generaliza y verifica la regla de formación de sumatorias notables, de sucesiones con distintos patrones, evalúa el valor máximo o mínimo de una sucesión y formula conjeturas sobre el comportamiento de una sucesión cuando tiende al infinito. Interpreta que una variable puede representar un valor constante o un parámetro. Modela las condiciones planteadas en una situación mediante sistemas de inecuaciones lineales y ecuaciones exponenciales; usa con flexibilidad diversas técnicas de simplificación y de solución, y argumenta los procedimientos seguidos. Modela situaciones o fenómenos de diversos contextos haciendo uso de variadas funciones definidas en tramos; conjetura cuándo una relación entre dos magnitudes puede tener un comportamiento exponencial, logarítmico o periódico<sup>3</sup>; formula, comprueba y argumenta conclusiones.

<sup>2</sup> Atributos que se perciben con los sentidos, como color, tamaño, textura, grosor, forma, etc.

<sup>3</sup> En el comportamiento periódico se consideran las siguientes funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente.

A continuación, presentamos algunos ejemplos de indicadores de desempeño y de trabajos de estudiantes para cada uno de los niveles del Mapa de Progreso.

## Previo

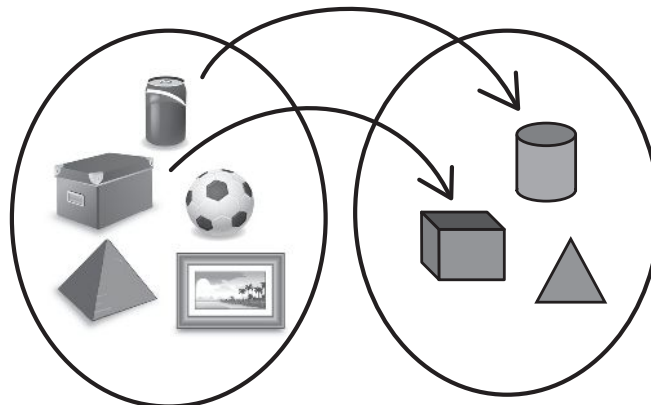
Identifica y describe patrones de repetición con un criterio perceptual<sup>4</sup>; completa, representa gráficamente y crea sucesiones con material concreto. Identifica relaciones entre objetos de dos colecciones, a partir de consignas dadas.

Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

- Continúa secuencias sonoras usando palmadas, pisadas (zapateo), instrumentos o la combinación de estos.
- Describe eventos cotidianos que se repiten usando expresiones como, *después de*, *antes de*. Ejemplo: *Después del día viene la noche y después de la noche viene el día*.
- Completa una secuencia de patrones de repetición usando material concreto o haciendo dibujos; por ejemplo, continúa la siguiente secuencia:



- Crea una secuencia ordenada de objetos evidenciando un patrón de repetición.
- Reconoce qué pares de elementos de dos colecciones cumplen una determinada relación; por ejemplo, relaciona los objetos de acuerdo a la característica "tienen la misma forma".



<sup>4</sup> Atributos que se perciben con los sentidos como color, tamaño, textura, grosor, forma, etc.

## Ejemplos de trabajos de los estudiantes

En este nivel, los trabajos de los estudiantes fueron recogidos en video. Para observar ejemplos de estos trabajos, por favor, ingrese a nuestra página web: <http://www.ipeba.gob.pe>

### a) Jugando con cuentas (video)

Se presentó a la estudiante una situación en la que otra persona empezó a elaborar un collar, pero no lo terminó, y se le invitó a completarlo siguiendo el orden o secuencia que esa persona había iniciado. Luego se le invitó a crear un collar siguiendo una secuencia u orden que a ella le guste.

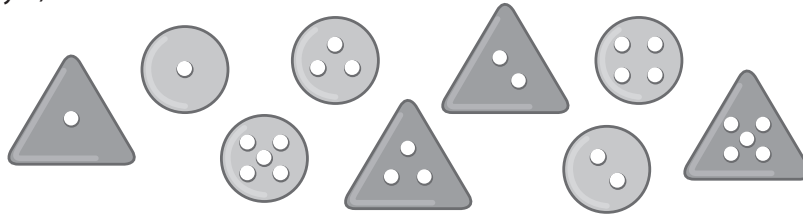


### COMENTARIO

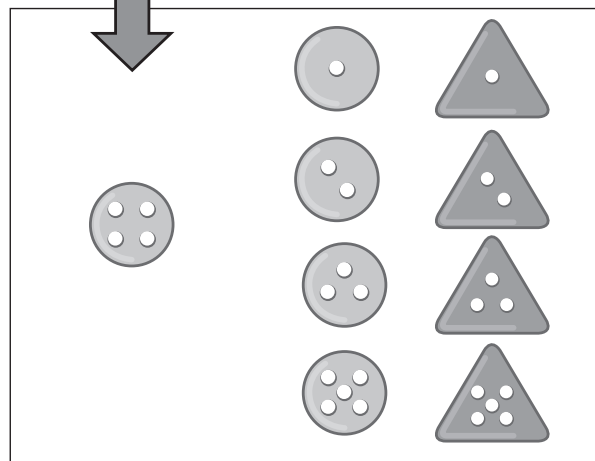
La estudiante completa el collar con dos cuentas amarillas, señalando que lo vio en el modelo dado, luego crea un patrón para hacer un nuevo collar usando cuatro colores: rojo, azul, amarillo y verde de manera secuencial.

## b) Jugando con botones (video)

Al estudiante se le alcanzó nueve botones, cuatro verdes de forma triangular y cinco amarillos de forma circular; asimismo, como se observa en el gráfico, los botones tenían diferente número de agujeros (1, 2, 3, 4 y 5).



La actividad consistió en pedir que el niño forme parejas de botones que tengan el mismo número de agujeros.



## COMENTARIO

El estudiante relaciona objetos de dos colecciones a partir de la indicación dada. En el ejemplo, el niño relacionó los botones tomando en cuenta la consigna "encontrar botones que tengan la misma cantidad de agujeros". Por ello, formó cuatro parejas de botones y dejó uno suelto. Finalmente, explicó que este último botón quedó sin agrupar porque para conformar una pareja más hace falta otro botón verde (triangular) con cuatro agujeros.

## III Ciclo (1° y 2° de primaria)

Identifica patrones aditivos con números naturales de hasta dos cifras y patrones de repetición con dos criterios perceptuales, completa y crea sucesiones gráficas y numéricas, y explica si un término pertenece o no pertenece a una sucesión. Interpreta y explica equivalencias entre dos expresiones y sus posibles variaciones en caso se agreguen o quiten cantidades hasta 20 a ambas expresiones, usando material concreto. Determina el valor desconocido en una igualdad entre expresiones que involucran adiciones y sustracciones, y explica su procedimiento. Establece, describe y representa gráficamente relaciones entre objetos de dos colecciones.

Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

- Completa los términos de una sucesión aditiva creciente o decreciente cuyo patrón va de dos en dos, de tres en tres o de cinco en cinco, empleando números menores que 100; por ejemplo, completa los términos en la siguiente sucesión:

11, 14, 17, \_\_\_\_, 23, 26, \_\_\_\_

- Describe oralmente cómo van cambiando los términos consecutivos en sucesiones gráficas con patrones de repetición o en sucesiones con patrones aditivos.
- Crea una sucesión con patrones de repetición con dos criterios perceptuales usando material concreto o haciendo dibujos; por ejemplo:



- Representa con material concreto y símbolos la igualdad entre dos expresiones aditivas; representa adiciones y sustracciones que sean equivalentes a  $10 + 2$ ; por ejemplo:

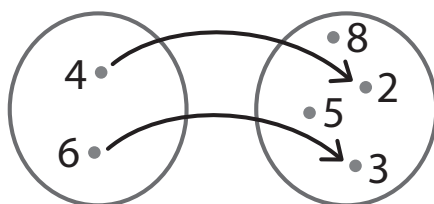
$$10 + 2 = 15 - 3, \text{ o bien que } 10 + 2 = 8 + 4.$$

- Agrega o quita una misma cantidad de objetos o números a ambos lados de una igualdad y comprueban que esta no cambia; por ejemplo, realiza la actividad con el material *Cuisenaire* y representa con números dichas equivalencias:

<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 15px; background-color: #f08080;">ROSADO</td> <td style="padding: 0 10px;">EQUIVALE</td> <td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 15px; background-color: #90ee90;">VERDE</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 15px; background-color: #f08080;">ROSADO</td> <td style="padding: 0 10px;">EQUIVALE</td> <td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 15px; background-color: #90ee90;">VERDE</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 15px; background-color: #ffff00;">AMARILLO</td> <td></td> <td style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 15px; background-color: #ffff00;">AMARILLO</td> </tr> </table>	ROSADO	EQUIVALE	VERDE	ROSADO	EQUIVALE	VERDE	AMARILLO		AMARILLO	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;"><math>4 = 3 + 1</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;"><math>4 + 1 = 3 + 1 + 1</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;"><math>5 = 5</math></td> </tr> </table>	$4 = 3 + 1$	$4 + 1 = 3 + 1 + 1$	$5 = 5$
ROSADO	EQUIVALE	VERDE											
ROSADO	EQUIVALE	VERDE											
AMARILLO		AMARILLO											
$4 = 3 + 1$													
$4 + 1 = 3 + 1 + 1$													
$5 = 5$													

- Concluye a partir de la experiencia con material concreto las propiedades de la adición; por ejemplo, dice que ganar 5 soles y luego 3 soles es lo mismo que ganar 3 soles y luego 5 soles (propiedad conmutativa).

- Describe la relación entre objetos de dos colecciones; por ejemplo, reconoce en un gráfico la relación “es el doble de”.



## Ejemplos de trabajos de estudiantes

En este nivel, los trabajos de los estudiantes fueron recogidos en video. Para observar ejemplos de estos trabajos, por favor, ingrese a nuestra página web: <http://www.ipeba.gob.pe>

### a) Visitas del mes de agosto (video)

Se le proporciona al estudiante un calendario del mes de agosto en el que se encuentran marcados los siete días que una persona llamada César visita a su tía Gladys y se le pregunta por la fecha en que realizará la octava visita, teniendo en cuenta que los números forman una secuencia numérica. Luego, se le pide al estudiante que elija a un familiar para visitar y que cree una secuencia numérica para mostrar los días que lo visitaría.



### COMENTARIO

El estudiante identifica patrones aditivos con números naturales en una sucesión numérica y también las crea. En el ejemplo, reconoce que César visita a su tía los días 2; 6; 10; 14; 18; 22 y 26, y explica que una octava visita la realiza el día 30 porque va de 4 en 4. Asimismo, crea una sucesión numérica conformada por 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21 y 24, y explica que a cada término se le agrega 3 diciendo: “porque le vas sumando el número de la secuencia que se esconde[...] +3”.

## b) Formando equivalencias con monedas (video)

En una primera actividad, se le entrega a la estudiante un monedero con monedas de S/. 1 y S/. 2 y se le pide que coloque sobre la mesa las necesarias para formar S/. 5. En una segunda actividad, dados dos grupos de monedas de cantidades equivalentes, se agrega sucesivamente la misma cantidad de monedas a ambos grupos y se le pregunta: ¿qué sucede cada vez que se agrega una misma cantidad de monedas en cada grupo? Finalmente, en una tercera actividad, se presentan dos envases con la misma cantidad de dinero (S/. 15); luego se toma uno de los envases, se coloca un grupo de monedas en un monedero, se le presenta ese envase con el monedero y S/. 3, y se le pregunta “¿Cuánto dinero se ha colocado en el monedero?”.



FOTO 1



FOTO 2



FOTO 3

### COMENTARIO

La estudiante representa en la primera actividad, dos grupos de monedas cuyo monto equivale a S/. 5 (Foto 1), comprueba que estos mantienen su equivalencia cada vez que se agrega la misma cantidad de dinero a ambos grupos (Foto 2). En la segunda y tercera actividad, identifica el valor desconocido en una igualdad, al calcular la cantidad de dinero que hay en el monedero, para ello establece una equivalencia entre los dos envases y explica su procedimiento (Foto 3).



## IV Ciclo

(3° y 4° de primaria)

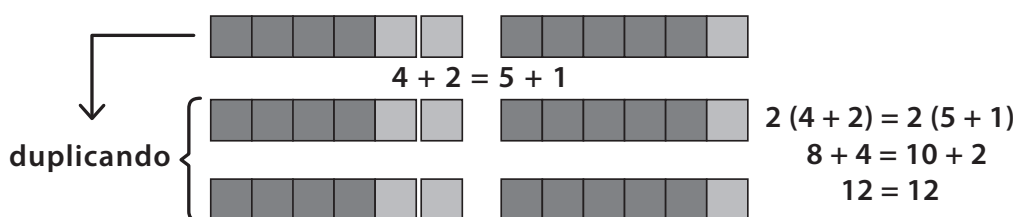
Interpreta patrones multiplicativos con números naturales y patrones de repetición que combinan criterios perceptuales y de posición; completa y crea sucesiones gráficas y numéricas; descubre el valor de un término desconocido en una sucesión; y comprueba y explica el procedimiento seguido. Interpreta y explica equivalencias entre dos expresiones y sus posibles variaciones en caso se multipliquen o dividan ambos lados de la igualdad, haciendo uso de material concreto y gráfico. Determina el valor desconocido en una igualdad entre expresiones que involucran multiplicaciones o divisiones entre números naturales de hasta dos dígitos y explica su procedimiento. Identifica y explica relaciones de cambio entre dos magnitudes y relaciones de equivalencia entre unidades de medida de una misma magnitud, y las representa en diagramas o tablas de doble entrada.


Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

- Explica cómo cambian los términos consecutivos en una sucesión con un patrón multiplicativo.
- Crea secuencias con patrones de repetición que combinan criterios perceptuales y de posición y los representa con dibujos o símbolos; por ejemplo: color y posición (dos círculos grises y uno blanco, el punto está alternadamente arriba y abajo).



- Diferencia el uso del signo igual para expresar el resultado de una operación y por otra parte presenta su uso para expresar una equivalencia entre expresiones numéricas; por ejemplo:  
 $3 + 17 = 20$  (como resultado)  
 $22 - 2 = 3 + 17$  (como equivalencia)
- Comprueba con material concreto o gráfico que dos expresiones siguen siendo equivalentes si multiplica o divide por un mismo valor a cada lado de una igualdad; por ejemplo:



- Concluye a partir de la experiencia con material concreto y gráfico que, al cambiar el orden de los factores o asociarlos indistintamente, el producto no cambia; por ejemplo, dice que el producto de  $4 \times 8$  da lo mismo que  $8 \times 4$ .
- Representa una cantidad desconocida en una igualdad utilizando íconos y determina su valor usando las propiedades de la igualdad; por ejemplo, obtiene el valor de un  en la expresión  $12 \times \text{book icon} = 72$
- Explica la relación de cambio entre dos magnitudes en diversas situaciones y en distintos formatos; por ejemplo, describe el crecimiento de una planta en relación a los días transcurridos.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Altura de la planta (cm)	0	0	0	0	1	1	2	3	3	4
Cambio observado	Ha brotado una raíz de la semilla		El tallo está por salir		El tallo y raíces empiezan a crecer					

- Relaciona unidades de longitud, masa y tiempo para establecer equivalencia; por ejemplo, identifica que 1 metro equivale a 100 cm; que  $\frac{1}{2}$  kg equivale a 500 g, y que 36 horas equivale 1 día y medio.

## Ejemplos de trabajos de estudiantes

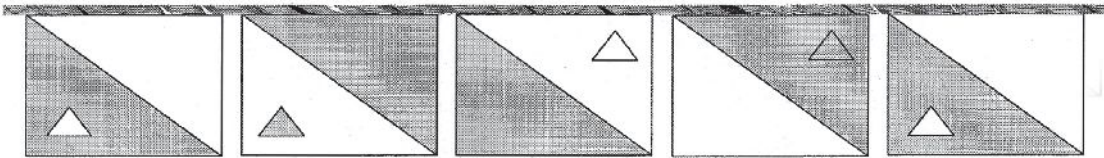
### a) Decorando con patrones

NIVEL 3 CAMBIO Y RELACIONES

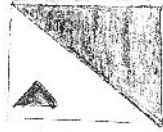
**TAREA 1**

**DECORANDO CON PATRONES**

Los estudiantes de cuarto grado están decorando su salón con una cadena de banderas formando una secuencia. Observa:



a) Dibuja la bandera que sigue.



b) ¿Cómo sabes que esa es la bandera que sigue? Explica.

Por que en la primera bandera hay un triángulo pequeño blanco y en la segunda negro y así sucesivamente van dos arriba y dos abajo, todos los triángulos grandes son de negro y igualmente van arriba y abajo.

## COMENTARIO

La estudiante completa el término desconocido en una sucesión gráfica con patrones de repetición que combinan criterios perceptuales que consideran color, forma y posición de los elementos de la figura, y describe el patrón a partir de sus características. En el ejemplo, dibuja la bandera que continúa en la cadena que están armando los estudiantes y describe los criterios que reconoció en el patrón de la sucesión: que los triángulos pequeños están con los colores alternados, que estos están colocados dos arriba y dos abajo, y que los triángulos negros grandes están, en forma alternada, arriba y abajo.

## b) El crecimiento de Daniela

### TAREA 2

#### EL CRECIMIENTO DE DANIELA

Observa los datos de la tabla en la que se registró la talla de Daniela en diferentes momentos de su vida.

EDAD	TALLA
0 años	52 cm
3 años	105 cm
6 años	112 cm
9 años	122 cm
12 años	155 cm
15 años	165 cm
18 años	165 cm
21 años	165 cm
24 años	165 cm

b) Explica ¿qué pasa con la talla de Daniela cuando aumenta su edad?

*Pasa que mientras más años tenga Daniela más crece, pero cuando llega a los 15, no crece ni se hace más pequeña.*

### COMENTARIO

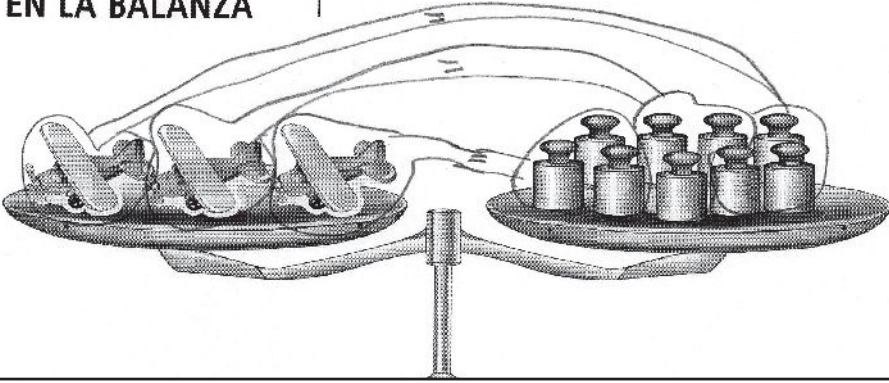
El estudiante interpreta información contenida en la tabla, y la utiliza para explicar las relaciones de cambio que se dan entre las dos magnitudes, la edad y la talla de Daniela. En el ejemplo, es capaz de identificar y explicar que, a medida que pasan los años, aumenta la talla de la niña, pero que, a partir de los 15 años, deja de crecer, lo que nos brinda evidencia de su capacidad para identificar y describir que entre dos magnitudes se dan relaciones cambiantes; por ejemplo, reconoció que en un periodo de tiempo ambas magnitudes pueden aumentar, mientras que, en otro, solo una de ellas aumenta.

### c) Manteniendo el equilibrio en la balanza

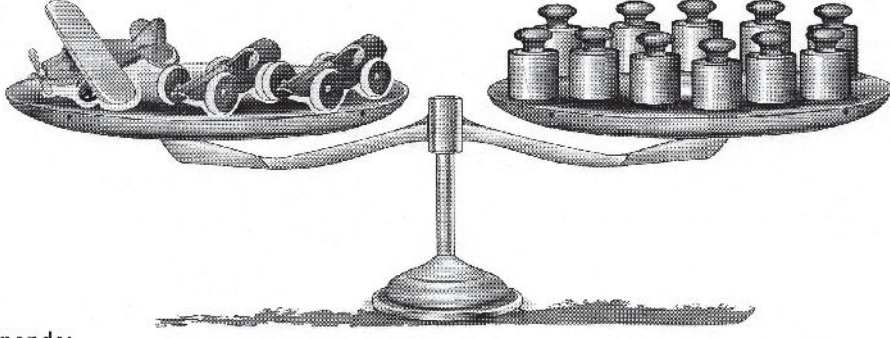
**TAREA 3**

**MANTENIENDO EL EQUILIBRIO EN LA BALANZA**

Alonso observa que tres aviones pesan igual que 9 pesas, como se representa en la balanza:



Alonso también observa que un avión y dos carros pesan igual que 11 pesas.



Responde:

b) ¿Cuánto pesa un carro? 4P = pesa cuatro pesas.

Explica como hallaste tu respuesta

descuento 3 pesas por el avión = 11 - 3 = 8 y luego dividi =  
8 ÷ 2 = 4.

## COMENTARIO

La estudiante establece equivalencias entre dos expresiones al relacionar los aviones y las pesas a partir de la información de la balanza en equilibrio. En la primera balanza reparte las pesas en forma equitativa a la cantidad de aviones y descubre que un avión equivale a tres pesas, mientras que en la segunda balanza descuenta el peso del avión y luego determina el peso del carrito. Esto evidencia que es capaz de encontrar el valor desconocido en una igualdad y describir su proceso.

20

## V Ciclo

(5° y 6° de primaria)

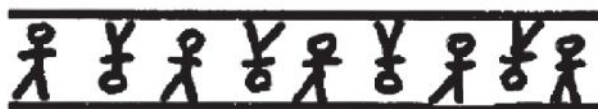
Interpreta patrones que crecen y decrecen con números naturales, y patrones geométricos que se generan al aplicar traslaciones, reflexiones o giros; completa y crea sucesiones gráficas y numéricas; descubre el valor del término desconocido en una sucesión dado su orden; comprueba y explica el procedimiento seguido. Interpreta que una variable puede representar un valor desconocido en una igualdad. Interpreta cuándo una cantidad cumple con una condición de desigualdad. Representa las condiciones planteadas en una situación problemática mediante ecuaciones con números naturales y las cuatro operaciones básicas; explica el procedimiento seguido. Modela diversas situaciones de cambio mediante relaciones de proporcionalidad directa y relaciones de equivalencia entre unidades de medida de una misma magnitud; las describe y representa en tablas o en el plano cartesiano. Conjetura si la relación entre dos magnitudes es de proporcionalidad directa; comprueba y formula conclusiones.

Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

- Completa el término desconocido en una sucesión creciente; por ejemplo:



- Crea sucesiones de términos que siguen patrones geométricos de traslación, reflexión o giro; por ejemplo, crea una sucesión construida en base a giros y traslaciones.



- Explica cómo halló el término desconocido en una sucesión cuando le dan la posición de ese término; por ejemplo, explica cómo encontró el término 80 en la sucesión que se muestra, diciendo que "cada ficha que ocupa una posición múltiplo de tres es blanca; 81 es múltiplo de tres; entonces la ficha 80 será de color gris".

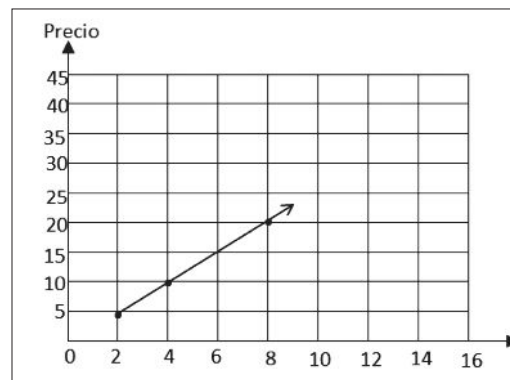


- Determina el valor de una variable en una igualdad; por ejemplo, calcula la base de un rectángulo que tiene 12 m<sup>2</sup> de área y 4 m de altura.  
 $A = b (h) \rightarrow 12 = b (4) \rightarrow b = 3 \text{ m}$
- Identifica en distintas situaciones valores que verifican una desigualdad; por ejemplo, reconoce los objetos que puede pesar en una balanza graduada máximo en 5 kg.
- Interpreta modelos de proporcionalidad directa expresados en tablas o gráficos; por ejemplo:

Peso (kg)	Precio (Nuevos soles)
2	5
4	10
8	20
12	
16	

Para hallar el precio de 12 kilos, se sumará los precios de 8 y 4 kg

Cómo 4 kg es el doble que 2 kg. Entonces el costo también se duplica



- Explica cuándo el cambio entre dos magnitudes es directamente proporcional; por ejemplo, explora los cambios entre las magnitudes y, señala dichos cambios y concluye que en la tabla 2 la relación no es proporcional.

Relación entre el peso y el costo

Tabla 1

Peso (kg)	Precio (Nuevos soles)
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15

triplica  
duplica

Tabla 2

Peso (kg)	Precio (Nuevos soles)
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11

triplica  
duplica

no triplica  
no duplica

## Ejemplos de trabajos de estudiantes

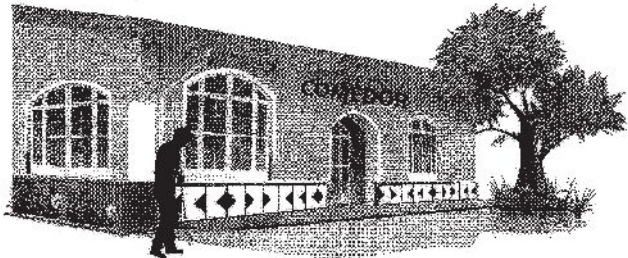
### a) Colocando mayólicas en el comedor escolar

NIVEL 4 - CAMBIO Y RELACIONES

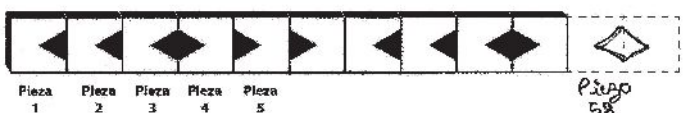
**TAREA 1**

**COLOCANDO MAYÓLICAS EN EL COMEDOR ESCOLAR**

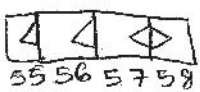
Un albañil está colocando mayólicas alrededor del comedor escolar formando una secuencia decorativa que sigue un mismo patrón, como se muestra en la figura.



a) El albañil va a colocar la pieza número 58. Dibuja la pieza que usará. Explica qué hiciste para obtener tu respuesta.



El procedimiento es de 6 en 6 así que el patrón no cambia el orden y si dividimos vamos a saber en que posición se toca.

$$\begin{array}{r} 58 \\ 4 \overline{) 24} \\ \underline{20} \\ 4 \end{array}$$


### COMENTARIO

El estudiante descubre en una sucesión gráfica el término desconocido a partir del orden que ocupa. Identifica que cada seis piezas forman un ciclo que se repite y a partir de esto logra determinar cómo es el término que está en la posición 58. En el ejemplo, demuestra su capacidad para realizar procesos de generalización con patrones geométricos y explica su procedimiento.



## b) El juego de las sogas

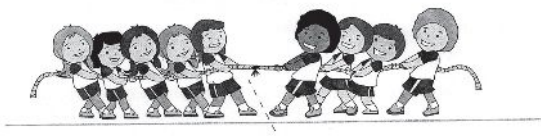
NIVEL 4 - CAMBIO Y RELACIONES

**TAREA 3**


**EL JUEGO DE LAS SOGAS**

El juego de la soga es una competencia donde dos grupos de personas tiran la soga en sentido opuesto y se declara como ganador al grupo que logre hacer que el pañuelo pase la línea del medio. Un grupo de estudiantes y su profesor jugaron dos veces, como se observa en los gráficos, quedando empates en ambas ocasiones.

**GRAFICO 1:**  
Cinco niñas empatan con cuatro niños



**GRAFICO 2:**  
Las cinco niñas y su profesor empatan con siete niños



NIVEL 4 - CAMBIO Y RELACIONES

**EL JUEGO DE LAS SOGAS**

A partir de tus observaciones responde las siguientes preguntas:

a) ¿A cuántos niños equivale la fuerza del profesor? Muestra tu procedimiento.

*Porque al colocar el profesor a la do' izquierdo se tuvo que aumentar 3 niños mas para que sigan empatar.*

*niños = niños*

*profesor = niños*

*1 = 3*

b) En un tercer juego tenemos al lado derecho de la soga un equipo conformado por 14 niños y al otro lado un equipo de profesores. ¿Hasta cuántos profesores deben colocarse al lado izquierdo para que los niños sigan ganando la competencia? Considera que todos los profesores tienen la misma fuerza que el profesor del gráfico 2.

*1 + 1 + 1 + 1*

*Deben colocarse hasta cuatro profesores para que los niños sigan ganando.*

8

### COMENTARIO

El estudiante interpreta las condiciones planteadas en la situación problemática y representa equivalencias estableciendo una relación proporcional entre el número de niños y de profesores. Usa las propiedades de las igualdades para encontrar a cuántos niños equivale la fuerza de un profesor, interpreta cuándo una cantidad cumple con una condición de desigualdad, al determinar el número de profesores que se deben colocar al otro lado para no superar la fuerza de los niños y explica su procedimiento gráficamente.

### c) El vendedor de helados

#### EL VENDEDOR DE HELADOS

Don Máximo es un vendedor de helados que compra la caja de 100 helados por S/. 170 y vende cada helado a S/2,50. La tabla muestra el registro de sus ventas.



- a) ¿Cuántos helados debe vender Don Máximo para recuperar sus S/. 170? Puedes usar la tabla para hallar tu respuesta.

N° de helados vendidos	1	2	4	30	80	60	68
Dinero recaudado (S/.)	2,50	5,00	10,00	75,00	200,00	150	170,00

$$\begin{array}{r}
 2,50 \times \\
 68 \\
 \hline
 20,00 \\
 15,00 \\
 \hline
 170,00
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2,50 \times \\
 4 \\
 \hline
 10,00
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2,50 \times \\
 30 \\
 \hline
 75,00
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2,50 \times \\
 80 \\
 \hline
 200,00
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2,50 \times \\
 60 \\
 \hline
 150,00
 \end{array}$$

Respuesta: Don Máximo debe vender  
68 helados para recuperar  
los S/. 170,00

#### COMENTARIO

La estudiante identifica que existe una relación proporcional entre el número de helados vendidos y el dinero recaudado por la venta; se observa que completa la tabla, probando valores que se acerquen a 170 soles y le ayudan a determinar la cantidad de helados vendidos. La estudiante usa una estrategia multiplicativa para encontrar la cantidad de helados vendidos; determina que son 68 helados y lo indica en la tabla y en su respuesta.

## VI Ciclo (1° y 2° de secundaria)

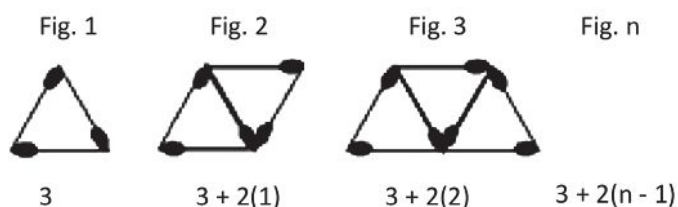
Interpreta y crea patrones geométricos que se generan al aplicar traslaciones, reflexiones o rotaciones y progresiones aritméticas con números naturales en las que generaliza y verifica la regla de formación y la suma de sus términos. Interpreta que una variable puede representar también un valor que cambia. Identifica el conjunto de valores que puede tomar un término desconocido para verificar una desigualdad. Representa las condiciones planteadas en una situación problemática mediante ecuaciones lineales; simplifica expresiones algebraicas, comprueba equivalencias y argumenta los procedimientos seguidos. Modela diversas situaciones de cambio mediante relaciones de proporcionalidad inversa, funciones lineales y afines; las describe y representa en tablas, en el plano cartesiano y con expresiones algebraicas. Conjetura cuándo una relación entre dos magnitudes tiene un comportamiento lineal; formula, comprueba y argumenta conclusiones.

Quando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

- Completa el término que falta en una sucesión con patrones geométricos (traslación, reflexión o rotación); por ejemplo:



- Deduce una regla general para encontrar cualquier término de una progresión aritmética con números naturales; por ejemplo, en la progresión aritmética formada por el número de palitos de cada figura, explica que cada nueva figura se forma agregando dos palitos más.



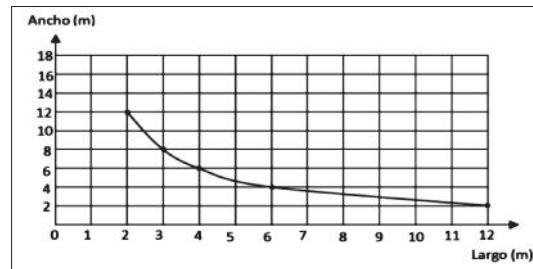
- Identifica que la suma de términos equidistantes a un término cualquiera de una progresión aritmética da siempre el mismo valor y usa esta conclusión para determinar la regla de la suma de términos de la progresión aritmética.

- Determina los distintos valores que puede tomar una variable; por ejemplo, dos cuadernos y un f6lder costaron S/. 10. 2u6ales son los posibles precios de cada objeto?

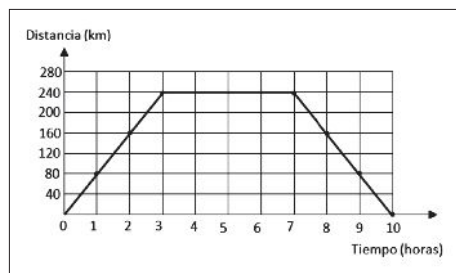
$2c + f = 10$	
$2(0) + 10 = 10$	$c = 0 \quad f = 10$
$2(1) + 8 = 10$	$c = 1 \quad f = 8$
$2(2) + 6 = 10$	$c = 2 \quad f = 6$
$2(3) + 4 = 10$	$c = 3 \quad f = 4$
$2(4) + 2 = 10$	$c = 4 \quad f = 2$
$2(5) + 0 = 10$	$c = 5 \quad f = 0$

- Interpreta el significado de una desigualdad doble y la simboliza; por ejemplo, expresa el rango de precios mayores a S/. 75,50 soles y menores que S/. 99,90 escribiendo  **$75,50 < x < 99,90$** .
- Interpreta y describe modelos de proporcionalidad inversa expresadas en tablas o gr6ficos; por ejemplo, establece la relaci6n entre las dimensiones de rect6ngulos que tienen la misma 6rea.

Largo (m)	2	3	4	6	12
Ancho (m)	12	8	6	4	2



- Explica que el crecimiento o decrecimiento de una funci6n lineal est6 determinado por el sentido de la raz6n constante de cambio; por ejemplo: Describe los cambios de sentido presentados en un gr6fico lineal.



El estudiante indica que el auto avanza 240 km. en tres horas, luego se detiene cuatro horas y regresa al punto de partida entre tres horas.

- Relaciona las diferentes representaciones de una funci6n lineal; por ejemplo, identifica si los datos de una tabla se relacionan con una representaci6n gr6fica o algebraica.
- Modela el cambio entre dos magnitudes mediante la funci6n af6n; por ejemplo, modela el c6lculo del sueldo de un vendedor de electrodom6sticos que tiene sueldo fijo de S/. 500 y comisiones de S/. 50 por cada art6culo vendido con la expresi6n  $y = 50x + 500$ .

## Ejemplos de trabajos de estudiantes

### a) Sucesiones gráficas:

**TAREA 2**

**Sucesiones gráficas**

Jorge dibuja una sucesión gráfica formada por triángulos equiláteros, como se muestra en el gráfico siguiente.

Figura 1    Figura 2    Figura 3    Figura 4    Figura 5

9cm    12cm    15cm    18cm    21cm

El investiga la relación entre las figuras que va dibujando y sus respectivos perímetros. Jorge observa que cuanto más grande es la figura mayor es su perímetro.

a) ¿Cuál será el perímetro de la figura número 83? Explica cómo hallaste tu respuesta.

83 x 3 = 249 + 6 = 255

el perímetro sera 255

o sea una serie.

Figura 1	Figura 2	Figura 3
1.3+6 = 9cm	2.3+6 = 12cm	3.3+6 = 18cm

porque solo a la figura actual se le agrega 6cm.

b) Jorge encuentra una relación cuantitativa entre las figuras y su respectivo perímetro. ¿Qué expresión algebraica representa la relación entre el perímetro de una figura cualquiera y su posición en la sucesión mostrada?

cont. de triángulos =  $x$   
Lados de triángulo = 3  
serie = 6

Solo se agregan 2 lados mas debido a que uno se usa y 2 se combinan con el 1.

$x \cdot 3 + 6 = \text{Perímetro}$

al unirlos por un lado se combinan en un solo lado ya miden igual

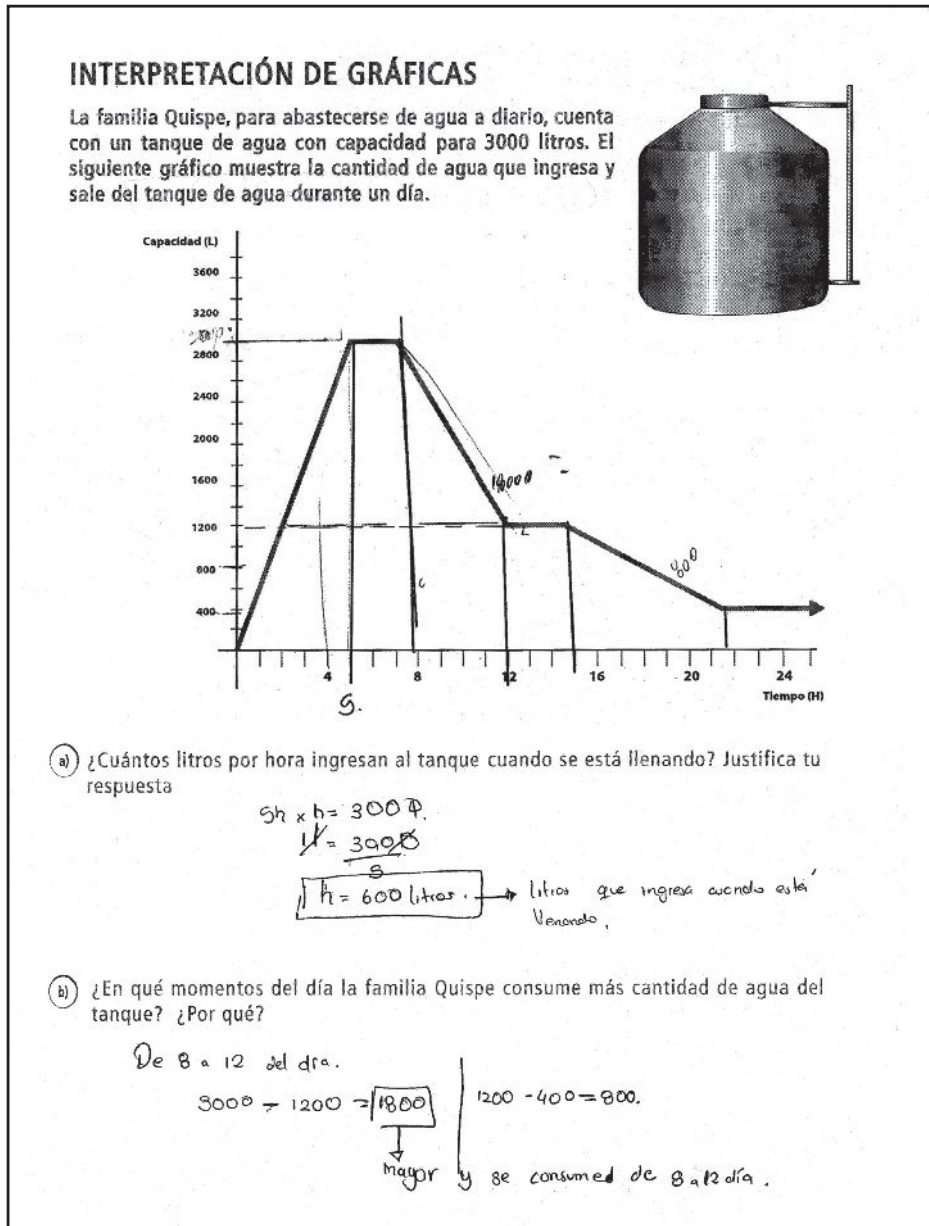
Cy b son los solo

se se agregan 2 lados cada vez 6cm.

## COMENTARIO

El estudiante completa el perímetro de las figuras que siguen la sucesión. Luego encuentra una relación entre el número de lados de cada figura y el orden que ocupa en la sucesión, explica en detalle cómo la relación encontrada se verifica para los tres primeros términos, y logra determinar el perímetro de la figura 83 empleando dicha regla general. Luego expresa la regla de formación mediante una expresión algebraica donde el valor cambiante es la cantidad de triángulos de cada figura; comenta que por cada triángulo que se agrega se necesita solo aumentar dos lados a la figura, demostrando con ello su capacidad para identificar el cambio entre figura y figura, y determinar el patrón que se repite en el cálculo del perímetro.

## b) Interpretación de gráficas



## COMENTARIO

La estudiante interpreta la información proporcionada de manera textual y gráfica, y señala en el gráfico los intervalos de tiempo y la cantidad de agua que va ingresando o saliendo del tanque durante ese tiempo; logra determinar la cantidad de litros por hora que ingresan al tanque planteando una ecuación en base a la relación proporcional observada; esto evidencia su capacidad para identificar el valor constante de cambio. Finalmente interpreta el gráfico, hace una comparación entre las dos cantidades de agua que salen y usa esta información para sustentar que de 8 a 12 horas se consume más agua.

### c) Eligiendo el plan que conviene más

NIVEL 5 – CAMBIO Y RELACIONES

**TAREA 1**

**ELIGIENDO EL PLAN QUE CONVIENE MÁS**

Una compañía de celulares ofrece diversos tipos de planes de servicio de celular. Jessica y Lorena consultan en las oficinas de atención y el vendedor les ofrece dos planes que se ajustan más a sus necesidades. Dichos planes son:

**PLAN HABLE MÁS**

Cuota fija de 25 nuevos soles al mes más S/ 0,20 céntimos por cada minuto de llamada que realice.

**PLAN HABLE FÁCIL**

No hay pago fijo mensual. El cliente solo paga S/ 0,40 por cada minuto de llamada que realice.

a) Jessica consume un promedio de 120 minutos al mes y Lorena unos 180 minutos al mes. ¿Qué plan le recomendarías usar a cada una? Justifica tu respuesta.

Jessica       $25 + \frac{120}{20} \times 0,20 = 25 + 12 = 37$

Lorena       $180 \times 0,40 = 72$

\* a Jessica le recomiendo el plan habla fácil ya que así gasta menos.

\* a Lorena le recomiendo el plan habla más ya que así gasta menos.

NIVEL 5 – CAMBIO Y RELACIONES

b) Escribe una expresión algebraica que relacione los minutos consumidos y el costo a pagar, en cada uno de los planes.

**Plan habla más**

X → minutos consumidos

$25 + (0,20x) = \text{Gasto mensual}$

**Plan habla fácil**

X → Minutos consumidos

$0,40x = \text{Gasto Mensual}$

c) Jessica observa que es posible pagar el mismo costo mensual en cada uno de los planes ¿Cuántos minutos se deben consumir en los dos planes para que el costo mensual sea el mismo? Explica los procedimientos que seguiste.

Jessica X → minutos

Plan habla más      Plan habla fácil

$25 + (0,20x) = 0,40x$       ← Se igualan los planes

$25 + 0,20x = 0,40x$

$25 = 0,40x - 0,20x$

$25 = 0,20x$

$\frac{25}{0,20} = x$

$125 = x \rightarrow \text{Debe consumir 125 minutos}$

### COMENTARIO

La estudiante evalúa qué plan de servicio de telefonía celular y se ajusta a las necesidades de cada amiga. En este ejemplo, representa la relación entre costo de cada plan y los minutos consumidos mediante una expresión algebraica general, en la que usa la variable (x) para expresar un valor cambiante, es decir, los minutos que se consumen al mes. Interpreta un caso particular de esta relación al establecer una equivalencia entre estas expresiones generales que le permita determinar la cantidad de minutos (x) que se deben consumir en los dos planes para pagar lo mismo; plantea y resuelve un sistema de ecuaciones lineales.

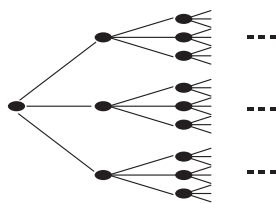
# VII Ciclo

(3°, 4° y 5° de secundaria)

Generaliza y verifica la regla de formación de progresiones geométricas, sucesiones crecientes y decrecientes con números racionales e irracionales; las utiliza para representar el cambio y formular conjeturas respecto del comportamiento de la sucesión. Representa las condiciones planteadas en una situación mediante ecuaciones cuadráticas, sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones lineales con una variable; usa identidades algebraicas y técnicas de simplificación, comprueba equivalencias y argumenta los procedimientos seguidos. Modela diversas situaciones de cambio mediante funciones cuadráticas, las describe y representa con expresiones algebraicas, en tablas o en el plano cartesiano. Conjetura cuándo una relación entre dos magnitudes puede tener un comportamiento lineal o cuadrático; formula, comprueba y argumenta conclusiones.

Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

- Crea sucesiones crecientes y decrecientes con números racionales cuyo patrón de formación comprende dos o varias operaciones, como en la siguiente sucesión:  **$2, 3/2, 4/3, 5/4, \dots, (n+1)/n$**
- Deduce una regla general para encontrar cualquier término de una progresión geométrica.



$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & \dots & t_n \\
 1 & 1(3)^1 & 1(3)^2 & 1(3)^3 & 1(3)^4 & \dots & 1(3)^{n-1}
 \end{array}$$

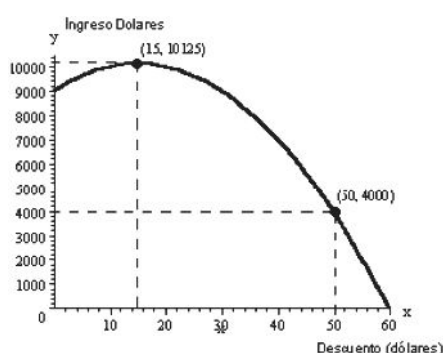
- Interpreta identidades algebraicas a partir de expresiones numéricas y representaciones geométricas; por ejemplo, interpreta la fórmula del binomio al cuadrado descomponiendo áreas.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Resuelve situaciones problemáticas mediante ecuaciones cuadráticas con una variable e interpreta los valores obtenidos de acuerdo al contexto del problema.



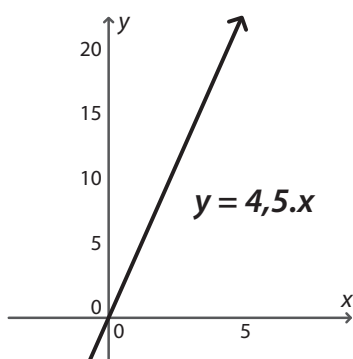
- Resuelve situaciones problemáticas mediante inecuaciones lineales con una variable. Ejemplo: Si al doble de la cantidad de monedas de 5 soles que tengo le sumo 1 000 soles, juntaré más de 3 700 soles. ¿Cuántas monedas de 5 soles tengo cómo mínimo?
- Discrimina si un conjunto de pares ordenados o un gráfico cartesiano representa a una función lineal, cuadrática o exponencial, a partir de las características de crecimiento de cada función.
- Interpreta y describe modelos de funciones cuadráticas; por ejemplo, interpreta los intervalos de crecimiento y decrecimiento en la función  $y = -5x^2 + 150x + 9000$ , que define la relación entre ingreso y descuento.



- Identifica cómo se generan otras magnitudes a partir de funciones lineales o cuadráticas entre magnitudes; por ejemplo, identifica que el producto de masa por aceleración genera la fuerza y que el cociente de distancia entre tiempo genera la velocidad.
- Argumenta sus predicciones sobre el comportamiento lineal o cuadrático de la relación entre dos magnitudes; por ejemplo, respecto a los gráficos y tablas que se presentan líneas abajo, indica que se observa que por cada kilo adicional de arroz aumenta el precio en 4,5 soles; por tanto, el cálculo del precio del arroz está dado por la función lineal  $y = 4,5(x)$  y su comportamiento es lineal.

### Relación entre precio y cantidad del arroz extra

(Válido para compras a granel menores de 20 kg.)



Cantidad (kg)	Precio (S./)
1	1
2	2
4	4
8	8
10	10
16	16

## Ejemplos de trabajos de estudiantes

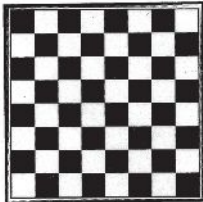
### a) Granos de trigo

**TAREA 1**

**GRANOS DE TRIGO**

En un lejano país Randú realizó una importante tarea para un emperador y este lo quiso recompensar concediéndole un deseo. Randú le pidió granos de trigo, pero de tal manera que le diera un grano por el primer cuadrado de un tablero de ajedrez, dos por el siguiente, cuatro por el siguiente, luego ocho y así sucesivamente.

El emperador aceptó sin imaginar la cantidad de granos de trigo que tenía que darle.



a) Escribe una expresión algebraica que represente la cantidad total de granos de trigo que tiene que dar el emperador a Randú.

$$\begin{aligned}n_1 &= 1 \Rightarrow n_1 = 1 = 2^1 - 1 \\n_2 &= 2 \Rightarrow n_1 + n_2 = 3 = 2^2 - 1 \\n_3 &= 4 \Rightarrow n_1 + n_2 + n_3 = 7 = 2^3 - 1 \\n_4 &= 8 \Rightarrow n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 15 = 2^4 - 1 \\n_5 &= 16 \Rightarrow n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 31 = 2^5 - 1 \\&\vdots\end{aligned}$$

entonces se puede concluir que la cantidad total de granos será:

$$n_{64} = 2^{64} - 1$$

### COMENTARIO

La estudiante busca algún comportamiento particular entre las primeras cantidades de granos que corresponden a los primeros 5 casilleros del tablero; se evidencia que encuentra esta relación al agregar una columna en donde expresa la operación que van cumpliendo cada uno de los términos  $(2^3 - 1)$ ; al comprobar y descubrir esta relación la usa para afirmar que, para el casillero de orden 64, bastará con calcular el resultado de  $(2^{64} - 1)$ . Este tipo de razonamiento pone de manifiesto su capacidad para llevar a cabo un proceso de generalización propio de este nivel, logrando, además, modelar el comportamiento de la sucesión mediante una expresión algebraica general.

## b) Índice de masa corporal

### TAREA 2

### ÍNDICE DE MASA CORPORAL

$$\text{Fórmula IMC} = \frac{m}{h^2}$$

Donde IMC es el índice de masa corporal,  $m$  la masa en kilogramos y  $h$  nuestra altura en metros.

Además existen tablas que, según nuestro IMC, nos señalan nuestro estado corporal:

El índice de masa corporal (IMC) es un indicador del estado físico de una persona.

Para determinar nuestro IMC solo es necesario saber nuestra altura en metros y nuestra masa en kilogramos. Con estos datos, de manera aproximada, podemos determinar nuestro IMC usando la siguiente fórmula:

Valor del IMC	Estado corporal
$\text{IMC} < 18,5$	Delgado
$18,5 \leq \text{IMC} < 25,0$	Normal
$25,0 \leq \text{IMC} < 30,0$	Sobrepeso
$30,0 \leq \text{IMC} < 35,0$	Obeso
$\text{IMC} \geq 40,0$	Obeso grave

- Alberto tiene una masa corporal de 85 kilogramos y su estado corporal se considera como "sobrepeso", ¿entre qué valores está comprendida su altura?

Alberto  $m = 85 \text{ Kg}$   
"sobrepeso"

$$\text{Sobrepeso} = 25 \leq x < 30$$

$$25 \leq \frac{85}{h^2} < 30$$

$$25 \leq \frac{85}{h^2} < 30 \wedge \frac{85}{h^2} < 30$$

$$h \leq \sqrt{\frac{85}{5}} \wedge \sqrt{\frac{85}{6}} < h$$

$$h \leq 1,8439 \wedge 1,6833 < h$$

Entonces los valores de altura está comprendida entre (4)  
 $1,6833 < h \leq 1,8439$

## COMENTARIO

El estudiante relaciona la información contenida en el texto del problema y en la tabla de datos, extrae de estos la información necesaria para plantear una inecuación donde "la altura de Alberto" es el valor desconocido; desarrolla estrategias de simplificación para obtener los valores de los extremos del nuevo intervalo e interpreta que Alberto tiene una altura mayor o igual a 1,68 m y menor a 1,84 m. Esto evidencia su capacidad para modelar situaciones mediante sistemas de inecuaciones lineales y usar flexiblemente técnicas de simplificación de expresiones algebraicas.

### c) Chocolates y caramelos

NIVEL 6 – CAMBIO Y RELACIONES

**TAREA 2**

**CHOCOLATES Y CARAMELOS**

Se colocan en cajas chocolates y caramelos de manera que siempre quede un caramelo entre cuatro chocolates, tal como se muestra a continuación:

a) Si hay "X" chocolates en una caja, escribe una expresión algebraica que represente la cantidad de caramelos de esta caja.

caja hay "X" chocolates  
 LA CAJA ES DE  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$   
 $(\sqrt{x}-1)^2$  caramelos

### COMENTARIO

El estudiante logra determinar una regla general para expresar una relación entre dos variables: la cantidad de chocolates y la de caramelos. Se observa su capacidad para interpretar y usar su comprensión de la función cuadrática, en tanto expresa una relación algebraica que la contiene. Por esa razón, este ejemplo corresponde al nivel, en tanto que el estudiante logra desarrollar procesos de generalización y de modelización de una situación usando la función cuadrática para expresar una relación entre dos variables.

## Destacado

Generaliza y verifica la regla de formación de sumatorias notables y de sucesiones con distintos patrones; evalúa el valor máximo o mínimo de una sucesión; formula conjeturas sobre el comportamiento de una sucesión cuando tiende al infinito. Interpreta que una variable puede representar un valor constante de un parámetro. Modela las condiciones planteadas en una situación mediante sistemas de inecuaciones lineales y ecuaciones exponenciales; usa con flexibilidad diversas técnicas de simplificación y de solución, y argumenta los procedimientos seguidos. Modela situaciones o fenómenos de diversos contextos haciendo uso de variadas funciones definidas en tramos; conjetura cuándo una relación entre dos magnitudes puede tener un comportamiento exponencial, logarítmico o periódico<sup>5</sup>; formula, comprueba y argumenta conclusiones.

Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

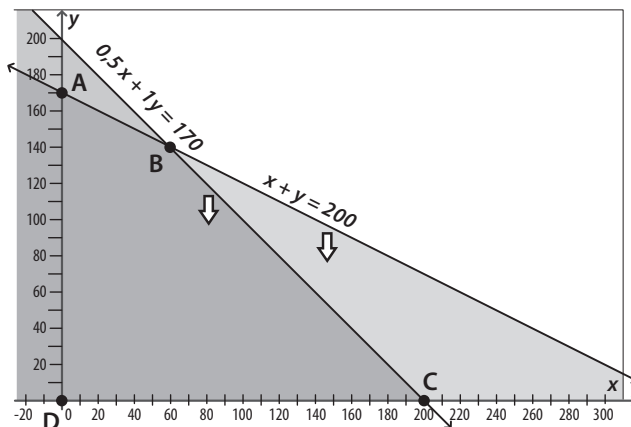
- Determina a partir de casos particulares las expresiones generales de sumatorias notables, como la suma de números pares, impares, cuadrados perfectos, cubos perfectos y las  $n$  primeras potencias naturales.
- Identifica el valor máximo o mínimo que va tomando una sucesión al acercarse al infinito empleando herramientas tecnológicas; por ejemplo, explora con ayuda de herramientas tecnológicas (*calculadora o algún software*) cuál es el valor máximo de  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{n}{n+1}$

Término	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{30}{31}$	$\frac{100}{101}$
Valor decimal	0,500	0,6667	0,75000	0,80000	0,83333	0,96774	0,99009

El estudiante nota que, a medida que los valores de la fracción aumentan, el cociente entre ellos se acerca a 1 y que concluyendo que, cuanto más grande los valores del término, más cercana es la diferencia entre ellos, de manera que el cociente es casi 1.

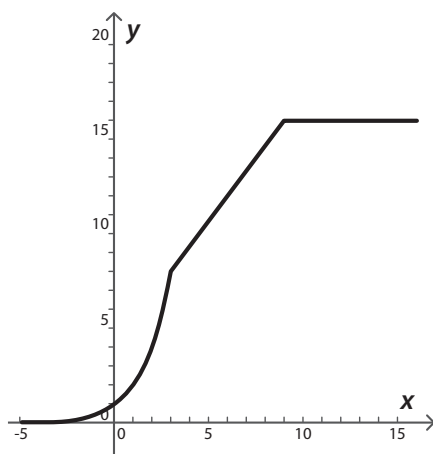
- Resuelve por métodos gráficos una situación problemática mediante un sistema de inecuaciones lineales con dos variables; por ejemplo, ante el problema: “Se tiene S/. 140 soles para invertir en un máximo de 200 sándwiches, sabiendo que se gana S/. 1 por cada pan con pollo y de S/. 0,50 por cada pan con huevo. ¿Cuántos sándwiches de cada tipo se deben vender para obtener el máximo beneficio?”, el estudiante resuelve la situación planteando sistemas de inecuaciones y usando métodos gráficos.

<sup>5</sup> En el comportamiento periódico se consideran las funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente.



$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < 200 \\ 0,5x + y < 170 \end{cases}$$

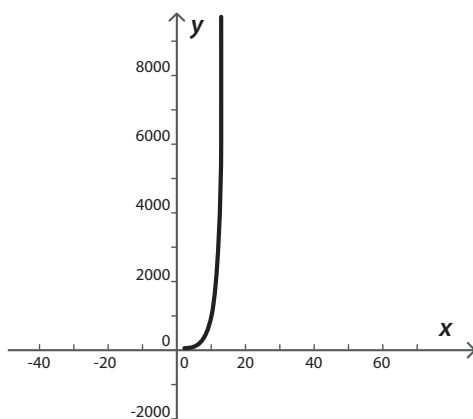
- Interpreta y representa modelos de funciones definidas en tramos; por ejemplo, dada una función definida en tramos, el estudiante la grafica considerando los dominios para la cual se encuentra definida.



El estudiante responde escribiendo las ecuaciones que representan la gráfica y determinando los dominios para la cual está definida.

$$\begin{cases} 2x, & -6 < x \\ F(x) = 4/3x+4, & 6 \leq x \leq 9 \\ 9, & x > 9 \end{cases}$$

- Argumenta sus predicciones sobre el comportamiento exponencial o periódico de la relación entre dos magnitudes. Ejemplo: El crecimiento del número de bacterias está dado por la fórmula  $y = 2^x$ , pues cada hora duplican su cantidad. ¿Cuántas horas habrán pasado para que haya más de 10 000 células de bacterias?



El estudiante responde, a partir del gráfico, que se puede inferir que al cabo de 13 ó 14 horas las bacterias habrán superado el número de 10 000.

## Ejemplos de trabajos de estudiantes

### a) Antiinflamatorio en el sistema circulatorio

**ANTIINFLAMATORIO EN EL SISTEMA CIRCULATORIO**

Olga se golpeó la rodilla jugando vóley. Su médico le recetó un antiinflamatorio para reducir la hinchazón. Ella tenía que tomar 1 pastilla de 100 miligramos cada 8 horas durante 10 días. Los riñones de Olga filtran el 60% del medicamento de su cuerpo cada 8 horas. Usa tu calculadora para que determines qué pasa con la cantidad de antiinflamatorio a partir de la toma 7 (es decir, la primera toma del tercer día). Justifica tu respuesta.

→ 1 pste →  $100 \cdot 10^{-3} \text{ g} \rightarrow 8 \text{ h}$  } 10 días  
 $\frac{240 \text{ h} \rightarrow 30 \text{ tomas}}{8}$

Riñón → 60% 100 mg → 60 mg

$i = \text{cant. del total que ingresa al cuerpo}$   
 $F = \text{cantidad filtrada}$   
 $r = \text{cantidad restante}$

	GT	CF	CR	Hora	toma
D I A 1	100	60	40	8	1
	200	84	56	16	2
	300	93.6	62.4	24	3
D I A 2	400	97.44	64.96	32	4
	500	98.976	65.98	40	5
D I A 3	600	99.58	66.39	48	6
	700	99.83	66.55	56	7

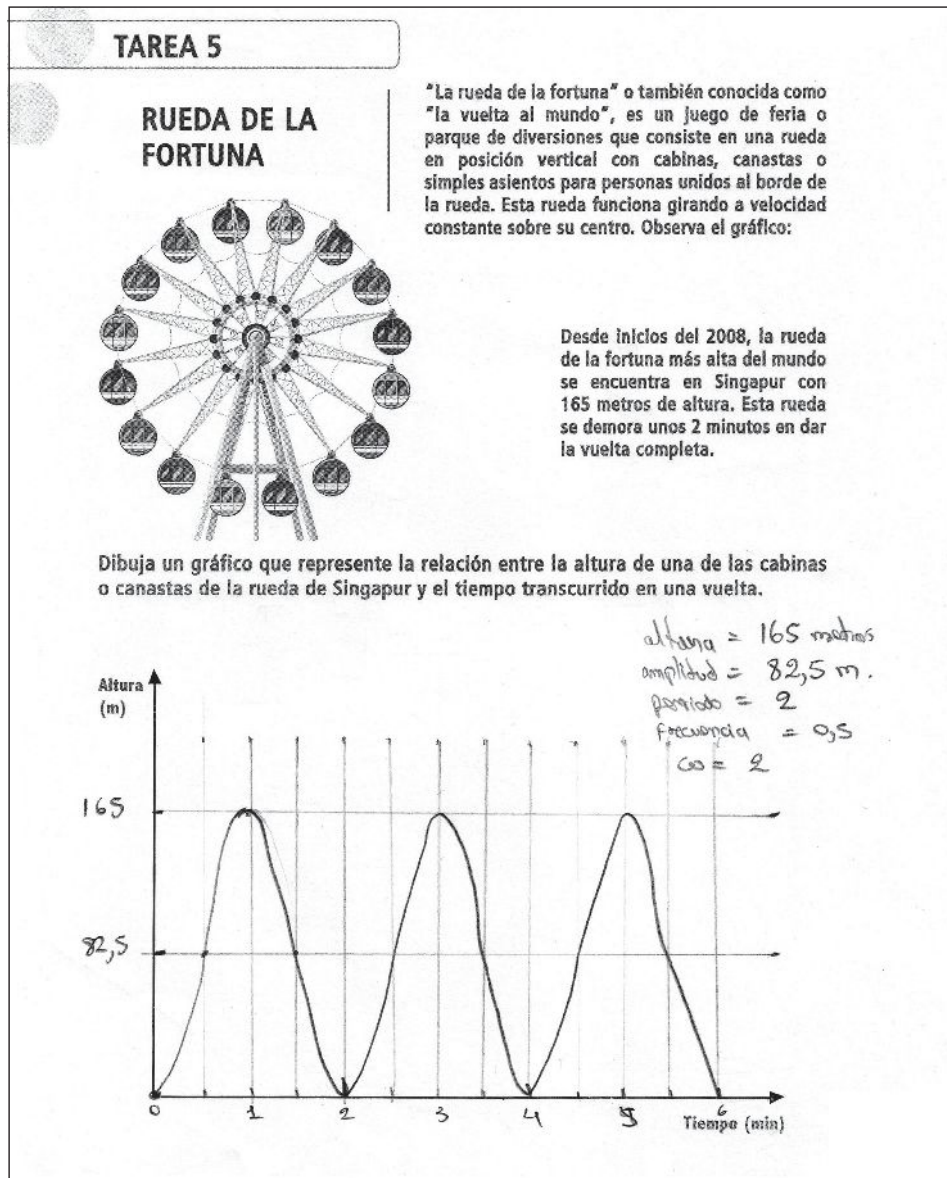
$\frac{100 \cdot 60}{100} = 60$   
 $\frac{200 \cdot 60}{100} = 120$   
 $\frac{300 \cdot 60}{100} = 180$   
 $\frac{400 \cdot 60}{100} = 240$   
 $\frac{500 \cdot 60}{100} = 300$   
 $\frac{600 \cdot 60}{100} = 360$   
 $\frac{700 \cdot 60}{100} = 420$

Rpta: De acuerdo a los valores encontrados en el gráfico, la cantidad de antiinflamatorio filtrado por los riñones de Olga se acerca a la cantidad de 100 mg a partir de la toma 7. Esto sucede debido a que la cantidad de antiinflamatorio que resta en el cuerpo se acerca a un valor constante.

### COMENTARIO

El estudiante identifica que hay dos cantidades variables durante la toma del medicamento: la cantidad de antiinflamatorio filtrado y la cantidad absorbido por el cuerpo de Olga. En base a estos criterios, elabora una tabla donde explora los cambios que se producen entre estas dos variables; identifica dos tendencias a partir de la toma 7: que la cantidad de antiinflamatorio absorbido se acercará a 100 mg y que la cantidad filtrada se acerca a un valor constante. Este desempeño evidencia su capacidad para identificar la convergencia de una sucesión y formular predicciones a partir de los cambios observados en la situación problemática.

## b) La rueda de la fortuna



## COMENTARIO

El estudiante interpreta la situación planteada al identificar las dos variables que cambian: el tiempo y la altura; asimismo, representa en el gráfico cómo estas variables cambian durante el desplazamiento de una de las sillas cuando gira la rueda de la fortuna. Se observa que coloca en el eje de las ordenadas dos puntos que corresponden con la altura máxima de la rueda y su mitad, mientras que en el eje de las abscisas coloca el valor del tiempo en minutos. En ese sentido, el estudiante logra reconocer el comportamiento periódico de este movimiento al representar tres de sus ciclos y señalar algunos de sus elementos, aunque no considera la distancia entre el suelo y la canasta más cercana.



# GLOSARIO

## 1. ARGUMENTAR

Dar razones lógicas o matemáticas que permitan sustentar, probar o demostrar la veracidad o falsedad de una proposición o idea planteada (Ministerio de Educación, 2004, p.28).

## 2. CLASIFICAR

Disponer un conjunto de datos o elementos en subconjuntos o clases de acuerdo a uno o varios criterios. Abarca la identificación de propiedades de los objetos y la comparación mediante el establecimiento de diferencias y semejanzas entre elementos. La clasificación se distingue del simple agrupamiento en tanto que utiliza criterios que permiten incluir a todos los elementos dados en alguno de los grupos establecidos.

## 3. COMPARAR

Establecer una relación entre los atributos cuantitativos o cualitativos que existe entre dos entes matemáticos de un mismo conjunto o clase (Ministerio de Educación, 2004).

## 4. COMPROBAR

Verificar, confirmar la veracidad o exactitud de un objeto matemático o situación a través de su concepto o propiedades.

## 5. CONJETURAR

Es elaborar suposiciones o hipótesis acerca de la verdad o falsedad de una afirmación, conclusión o resultado matemático a partir de indicios y observaciones.

## 6. DESCRIBIR

Explicar con detalle las características o condiciones en que presenta algún objeto matemático usando el lenguaje oral (Adaptado del Diccionario de la Lengua española de Real Academia Española, 2012).

## 7. EVALUAR

Valorar o determinar el grado de efectividad de un conjunto de estrategias o procedimientos, a partir de su coherencia o aplicabilidad a otras situaciones problemáticas.

## 8. ESTABLECER EQUIVALENCIAS

Proceso que consiste en componer y descomponer un número, que puede llevarse a cabo de dos maneras distintas (Ministerio de Educación, 2009, p.5):

- Expresar un número natural compuesto por unidades de diferente orden del sistema de numeración decimal, como las unidades, decenas y centenas. Esto corresponde a la primera fase en el desarrollo de la comprensión del sistema de numeración decimal, donde los números se pueden ver bajo el esquema *parte - todo*, es decir, que un número está compuesto por otros números.
- Expresar un número natural usando, múltiples composiciones de una cantidad además de usar las unidades convencionales; por ejemplo  $64 = 50 + 14$  se interpreta como *64 es igual que decir 5 decenas y 14 unidades*, o también,  $7\ 428 = 6M + 17C + 2D + 8U$ , así también expresar  $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ . Esto corresponde a la segunda fase en el desarrollo de la comprensión del sistema de numeración decimal y del sentido numérico.

## 9. EXPLICAR

Describir o exponer las razones<sup>6</sup> o procedimientos seguidos para la solución de un problema, exigiendo en el alumno establecer conexiones entre sus ideas.

## 10. GENERALIZAR

Identificar a partir de la observación de casos particulares la regla general que describe el comportamiento de, por ejemplo, una sucesión, una relación entre variables o de alguna ley matemática.

## 11. IDENTIDAD ALGEBRAICA

Son igualdades algebraicas que se verifican para cualquier valor que tomen sus variables. Las identidades suelen utilizarse para transformar una expresión matemática en otra equivalente, particularmente para resolver una ecuación, por ejemplo, la ecuación del binomio al cuadrado, la suma o diferencia de cubos, entre otras.

<sup>6</sup> El problema es que en la actualidad los objetivos de la mayoría de los currículos matemáticos se centran por completo en hacer y casi nada en explicar. Explicar es la actividad de exponer las relaciones existentes entre unos fenómenos y la "búsqueda de una teoría explicativa", como la describe Horton (1967), citado en Enculturación matemática la educación matemática desde una perspectiva cultural, Alan Bishop, Paidós, 1999, España.

## 12. IDENTIFICAR

Diferenciar los rasgos distintivos de un objeto matemático; es decir, determinar si pertenece a una determinada clase que presenta ciertas características comunes (Hernández, Delgado y otros, 1999).

## 13. INTERPRETAR

Atribuir significado a las expresiones matemáticas, de modo que estas adquieran sentido en función del propio objeto matemático o en función del fenómeno o problema real del que se trate. Implica tanto codificar como decodificar una situación problemática (Hernández, Delgado y otros, 1999, pp. 69-87).

## 14. MAGNITUD

Característica de un objeto o fenómeno que puede ser medida, como la longitud, la superficie, el volumen, la velocidad, el costo, la temperatura, el peso, etc.

## 15. MODELAR

Asociar un objeto no matemático a un objeto matemático que represente determinados comportamientos, relaciones o características considerados relevantes para la solución de un problema (Hernández, Delgado y otros, 1999, pp. 69-87).

## 16. PATRÓN ADITIVO

Es la secuencia de números cuyo criterio de formación es la suma o resta de un mismo valor a lo largo de toda la sucesión (Bressan, 2010); esta característica determina que puedan ser crecientes o decrecientes; por ejemplo,  $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$  o, también,  $30, 25, 20, 15, 10, \dots$

## 17. PATRÓN MULTIPLICATIVO

Es la secuencia de números cuyo criterio de formación es la multiplicación o división de un mismo valor a lo largo de toda la sucesión; esta característica determina que puedan ser ascendentes o descendentes; por ejemplo,  $4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots$

## 18. PATRÓN DE REPETICIÓN

Es la secuencia gráfica o numérica donde dos o varios de sus elementos se presentan en forma periódica. (Bressan, 2010); por ejemplo,  $\square, \triangle, \triangle, \square, \triangle, \triangle, \square, \dots$  o también,  $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, \dots$

## 19. REPRESENTAR

Elaborar una imagen, gráfico o símbolo visual de un objeto matemático y sus relaciones empleando formas geométricas, diagramas, tablas, el plano cartesiano entre otros.

## 20. RESOLVER

Encontrar un método que conduzca a la solución de un problema matemático, el cual puede estar enmarcado en diferentes contextos (Ministerio de Educación, 2005).

## 21. VARIABLE

Una variable es un símbolo, habitualmente una letra, que puede ponerse en lugar de cualquier elemento de un conjunto, sean números u otros objetos. Las variables sirven para expresar regularidades y relaciones generales entre objetos de una manera eficaz.

Usos principales de las variables en matemáticas, descritas por Godino (2003):

- La variable como incógnita: Uso de la variable para representar el valor de un número u objeto desconocido que se manipula como si fuera conocido.  
Ejemplos: En la igualdad  $4x + 2 = 3x + 5$ , "x" representa al número 3.
- Las variables como indeterminadas o expresión de patrones generales. Uso de la variable para expresar enunciados que son ciertos para un determinado conjunto de números. Ejemplo: Para todos los números reales se cumple que  $a \cdot b = b \cdot a$ .
- Las variables para expresar valores que varían conjuntamente. Uso de la variable para expresar una relación de dependencia entre dos magnitudes. Ejemplo:  
En la expresión  $y = 5x + 6$ , cuando cambia x también lo hace y.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

**BRESSAN Ana María, GALLEGO María F.** (2010)

*El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones*,  
Revista Correo del Maestro, N° 168, mayo de 2010. Consultado en abril 2012 en:  
[http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/corre\\_maestro\\_\\_matematizacion\\_progresiva.pdf](http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/corre_maestro__matematizacion_progresiva.pdf)

**BOSCH M, GARCÍA F, GASCÓN J, RUIZ L.** (2006)

*La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar, un propuesta de la teoría antropológica de lo didáctico*. Educación Matemática, agosto, vol 18, número 002, Ed Santillana, distrito federal de México. pp. 37-74. Consultado en enero de 2012 en:  
<http://redalyc.uaemex.mx/pdf/405/40518203.pdf>

**BUTTO, C. y RIVERA, T.**

*La generalidad una vía para acceder al pensamiento algebraico: un estudio sobre la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo*, Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Ajusco. XI Congreso Nacional de Investigación Educativa / 5. Educación y Conocimientos Disciplinarios / Ponencia. Consultado en enero de 2012 en: [http://lab.iiiipe.net/congresonacional/docs/area\\_05/1330.pdf](http://lab.iiiipe.net/congresonacional/docs/area_05/1330.pdf)

**FERREYRA Nora; RECHIMONT Estela; PARODI Carlos; CASTRO Nora** (2010)

*De la aritmética al álgebra. Experiencia de trabajo con estudiantes universitarios*. Revista Iberoamericana de educación Matemática, Marzo de 2010, Número 21, páginas 59-67. Consultado en junio de 2011 en:  
[http://www.fisem.org/web/union/revistas/21/Union\\_021\\_009.pdf](http://www.fisem.org/web/union/revistas/21/Union_021_009.pdf)

**FRIPP, Ariel** (2009)

*Álgebra: Aportes para nuevas reflexiones*, revista *Que hacer educativo, didácticas y prácticas educativas*, abril 2009. Consultado en abril del 2012 en:  
[http://quehacereducativo.edu.uy/docs/474c1fa4\\_94%20did+%C3%ADctica%2003.pdf](http://quehacereducativo.edu.uy/docs/474c1fa4_94%20did+%C3%ADctica%2003.pdf)

**GARCÍA, Francisco, BOSCH, Mariana, GASCÓN, J. y RUIZ, Luisa.** (2007)

*El álgebra como instrumento de modelización articulación del estudio de las relaciones funcionales en educación secundaria*. Investigación en Educación Matemática, Universidad de Jaén. pp. 71-90. Consultado en diciembre del 2011 en: <http://funes.uniandes.edu.co/1268/>

**GODINO Juan d y FONT Vicenç** (2003)

*Razonamiento Algebraico Para Maestros*, Repro Digital, Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación. Consultado en marzo del 2011 en:  
[www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7\\_Algebra.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf)

**GRAVEMEIJER, K. y TERUEL, J.**

*Hans Freudenthal: un matemático en didáctica y teoría curricular*. Traducción: Norma Saggese, Fernanda Gallego y Ana Bressan(GPDM). J. Curriculum studies, 2000, vol. 32, N°. 6, 777- 796

**HERNÁNDEZ FERNÁNDEZ H., DELGADO RUBÍ J.R., FERNÁNDEZ DE ALAÍZA B., VALVERDE RAMÍREZ L., RODRÍGUEZ HUNG T.** (1998)

*Cuestiones de didáctica de la Matemática. Serie Educación. Conceptos y procedimientos en la educación polimodal y superior*. Homo Sapiens Ediciones: Rosario (Argentina).

### **MINISTERIO DE EDUCACIÓN**

- (2009). *Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular*. Lima, MED 2009, 2da edición. Aprobado con R.M. 0440 – 2008-ED.
- (2010). *Evaluación censal de estudiantes 2009 – segundo grado de primaria*. Guía de análisis para docentes – Matemática. Lima: Ministerio de educación.
- (2005). *Evaluación nacional del rendimiento estudiantil 2004. Informe pedagógico de resultados – primaria*. Lima: Ministerio de educación.
- (2005). *Evaluación nacional del rendimiento estudiantil 2004. Informe pedagógico de resultados – secundaria*. Lima: Ministerio de educación.

### **MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL** (2006)

*Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá, Editorial Ministerio de Educación Nacional.

Consulta: abril de 2010. [www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042\\_archivo\\_pdf.pdf](http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf.pdf).

### **MINISTRY OF EDUCATION** (2005)

*The Ontario Curriculum, Grades 1-8 Mathematics*. Ontario, Queen's printer.

Consulta: enero de 2011. < <http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/elementary/math.html>>

### **MOLINA, Marta** (2006)

*Tesis doctoral: Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por los alumnos de tercero de educación primaria*, Universidad de Granada, departamento de didáctica de la Matemática, Granada 2006.

Consultado en abril de 2012 en: <http://0-hera.ugr.es/adrastea.ugr.es/tesisugr/16546167.pdf>

### **ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT - OECD** (2003)

*Marcos teóricos de PISA 2003*. Traducido por Encarnación Belmonte (2004). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE)

### **PALAREA María de las Mercedes** (1999)

*La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación*, *Números*, revista de didáctica de la Matemática, volumen 40, diciembre de 1999, pp 3 – 28.

Consultado en enero de 2012 en: <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/40/Articulo01.pdf>

### **VERGEL, Rodolfo** (2010)

*La Perspectiva de Cambio Curricular Early-Algebra como Posibilidad para desarrollar el Pensamiento Algebraico en Escolares de Educación Primaria: Una Mirada al Proceso Matemático de Generalización*, *Memoria 11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa 2010*.

Consultado en enero de 2012 en:

[http://funes.uniandes.edu.co/1163/1/69\\_La\\_Perspectiva\\_de\\_Cambio\\_Curricular\\_Early-Algebra\\_Asocolme2010.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/1163/1/69_La_Perspectiva_de_Cambio_Curricular_Early-Algebra_Asocolme2010.pdf)

El IPEBA y el Ministerio de Educación están elaborando MAPAS DE PROGRESO para las distintas competencias que se deben desarrollar en Comunicación, Matemática, Ciencia y Ciudadanía. Esto implica un arduo trabajo técnico, por lo que requiere tiempo. Por ello, el IPEBA y el Ministerio de Educación elaborarán y publicarán los MAPAS de manera progresiva. Esta vez, se pone a disposición de la comunidad educativa los MAPAS DE PROGRESO de Lectura, Escritura y Comunicación oral (Comunicación); y de Números y operaciones, Cambio y relaciones, Geometría, y Estadística y probabilidad (Matemática). Más adelante se tiene programado publicar los mapas de Ciencia, Ciudadanía y Educación Inicial.

Usted puede encontrar este MAPA DE PROGRESO, así como las versiones más recientes de los demás mapas que venimos elaborando, en la web: **[www.ipeba.gob.pe](http://www.ipeba.gob.pe)**. Ahí encontrará, además, un espacio para compartir con nosotros sus impresiones y aportes sobre estos mapas.

