

**ASESORAMIENTO ESPECIALIZADO EN FORMULACIÓN DE COMPETENCIAS
DE APRENDIZAJE PROGRESIVO EN EL ÁREA DE MATEMÁTICA**

SEGUNDO INFORME

MAYO, 2011

CONSULTORA: ROSA CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

DNI: 07757120

FIRMA

Objetivo general:

Elaborar estándares de aprendizaje de matemáticas desde el primer grado de la educación primaria hasta el quinto grado de la educación secundaria.

Objetivo específico del segundo mes de asesoría:

Tener una versión acabada del mapa de Pensamiento Numérico y del documento marco que sustente la propuesta de cuatro mapas para la elaboración de estándares.

Desarrollo de la asesoría: Durante el segundo mes de asesoría se realizaron cuatro reuniones quincenales y se mantuvo un constante intercambio de ideas empleando diversos medios de comunicación. A continuación se señalan los principales resultados obtenidos en cada una de ellas.

Reunión del 20 de abril de 2011

Objetivo:

1. Comentar las principales observaciones recibidas por la coordinadora del equipo de estándares del IPEBA.
2. En función a esas observaciones, se trabajará en la definición de palabras claves para cada dimensión que deben estar presentes en todos los niveles de modo que se note la progresión que el modelo teórico exige.

A continuación se muestran las principales observaciones recibidas.

Revisión borrador 1 Matemática.

Comprensión de los números

Capacidad para resolver situaciones problemáticas que requieran trabajar con el significado de los números, con sus relaciones de orden, de equivalencia y sus representaciones. Abarca también tener claridad de las relaciones que se pueden establecer entre los diferentes conjuntos numéricos.

Comentario [J1]: Revisar el uso de la persona. Creo que es mejor opción usar la tercera del singular, con sujeto tácito: "Resuelve diversas situaciones...."

Comentario [J2]: "tener claridad" es una expresión vaga e inespecífica

<p><u>NIVEL 1: Los estudiantes resuelven problemas de distintos contextos, que le demandan identificar, contar y representar gráficamente números naturales hasta las unidades.</u></p>	<p><u>Comparan colecciones de objetos usando expresiones como uno/muchos/pocos/ninguno/algunos/todos y más que/menos que y las ordena de manera ascendente y descendente.</u></p>		
<p><u>NIVEL 2: Los estudiantes resuelven problemas de distintos contextos, en los que se evidencia que pueden identificar, contar, ordenar, comparar, representar (gráfica y simbólicamente), establecer equivalencias, leer y escribir números naturales hasta las decenas.</u></p>	<p><u>Clasifican números en pares e impares y los relacionan con su doble o mitad.</u></p>		
<p><u>NIVEL 3: Los estudiantes</u></p>	<p><u>Resuelven problemas en</u></p>		

Comentario [J3]: "colecciones de objetos"? ¿cómo se ordenan de manera ascendente y descendente las colecciones de objetos?

En este nivel no hay referencia al tema de las "relaciones entre los diferentes conjuntos numéricos", no?

Comentario [J5]: Así como en el nivel 1, esta segunda oración alude al establecimiento de relaciones entre los números naturales, no? Las relaciones son de comparación, ordenamiento, equivalencia, etc, no?

Comentario [J6]: Como en el nivel 1, ¿no hay referencia al tema de las "relaciones que se pueden establecer entre los diferentes conjuntos numéricos", no?

Comentario [J4]: Debemos definir cada uno de estos verbos cuanto antes. ¿cuál es la diferencia entre "identificar" y "leer", por ejemplo? Asimismo, ¿cuál es la diferencia entre "representar gráficamente" y "escribir"? ¿qué significa exactamente "comparar" números naturales?, ¿comparar con qué o con qué fin?

resuelven problemas de distintos contextos, en los que se evidencia que pueden identificar la estructura del valor posicional de los números naturales hasta las unidades de millar, los comparan, ordenan y establecen equivalencias entre ellos.	los que requiere interpretar a la fracción como parte de un todo, como cociente de enteros e identificar fracciones equivalentes.		
NIVEL 4: Los estudiantes resuelven problemas de distintos contextos, en los que se evidencia que identifican la estructura del valor posicional de los números naturales hasta la unidad de millón y de los números decimales hasta la centésima, los comparan, ordenan y relacionan con las fracciones en un mismo conjunto numérico.	Resuelve problemas en los que interpreta a la fracción como una razón, como un operador y como porcentaje.		
NIVEL 5: Los estudiantes resuelven problemas de distintos contextos, en los que representa, compara y utiliza los números racionales en sus diversas formas equivalentes (enteros, fracciones, decimales, porcentajes, notación científica) y justifican la densidad en \mathbb{Q} empleando fracciones equivalentes y promedio aritmético.	Justifican la existencia de los números negativos a partir de situaciones que no pueden resolver con los positivos.		
NIVEL 6: Los estudiantes resuelven problemas de distintos contextos, en los que justifican la existencia de números cuya representación decimal no es exacta ni periódica y los define como el conjunto de los números irracionales.	Identifican a los números reales como el conjunto de todos los números decimales que dan completitud a la recta.		

Comentario [J8]: Esto alude al tema de "relaciones entre los diferentes conjuntos numéricos"?

Comentario [J7]:Cuál es la diferencia con lo señalado en el nivel 2? También se señala que se debe comparar, ordenar y establecer equivalencias entre los números.

Comentario [J9]: Esto alude al tema de "relaciones entre los diferentes conjuntos numéricos"?

Comentario [J11]: No es claro a qué parte de la dimensión alude esta tarea y en qué medida esta parte progresa

Comentario [J10]: "densidad en \mathbb{Q} "? me suena excesivamente técnico....

Comentario [J14]: Solo identifican? No hay alusión al trabajo que se hace con este tipo de números?

Comentario [J12]: Nuevamente no se señal de qué manera se justifica...en algunos casos se señala cómo se debe justificar y en otros no.

Comentario [J13]: No entiendo qué cosa es lo que se debe hacer acá ¿identificar a los irracionales

NIVEL 7: Los estudiantes <u>interpretan el significado de los números en problemas de diferentes contextos, identifican, demuestran y usan sus propiedades según los conjuntos numéricos a los que pertenecen.</u>			

Comentario [J15]: Qué sgca “interpretan” a diferencia de “justificar la existencia de”

Comprensión de las operaciones

Capacidad para resolver situaciones problemáticas que requieren tener claridad del significado de las operaciones, de sus propiedades y de cómo se relacionan dichas operaciones en los distintos conjuntos numéricos.

Comentario [J16]: “tener claridad” es una expresión ambigua.

Comentario [J17]: Qué tipo de operaciones?

NIVEL 1: Los estudiantes <u>resuelven situaciones problemáticas relacionadas a “juntar” o “agregar” y “quitar” o “disminuir” elementos concretos de una o más colecciones de objetos.</u>			
NIVEL 2: Los estudiantes <u>resuelven problemas aditivos de combinación y cambio y justifican su proceso de solución.</u>	<u>Identifican y justifican empleando material concreto y representaciones gráficas que las propiedades conmutativa y asociativa se verifican en la adición y no en la sustracción.</u>		
NIVEL 3: Los estudiantes <u>resuelven problemas aditivos de comparación e igualación, así como situaciones multiplicativas de proporcionalidad simple y de producto cartesiano y justifican su proceso de solución, así como el algoritmo de la multiplicación empleando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición</u>			
	<u>Identifican la división como</u>	<u>Identifica cuales de las</u>	<u>Al resolver situaciones con</u>

Comentario [J18]: Creo que es la única vez que se hace referencia a la manera cómo se debe justificar

Comentario [J19]: Acá se señala que se resuelve el algoritmo de la multiplicación empleando una propiedad específica. ¿eso quiere decir que hay otras manera de resolver algoritmos multiplicativos?

Comentario [J20]: Creo que aquí hay un problema de redacción. ¿Resuelven problemas aditivos, situaciones multiplicativas y algoritmos de multiplicación??

<u>NIVEL 4: Los estudiantes resuelven problemas de comparación multiplicativa y justifican su proceso de solución.</u>	<u>la razón entre dos cantidades y en situaciones de reparto en partes iguales.</u>	<u>cuatro operaciones son inversas y reiteradas entre sí.</u>	<u>números decimales, identifican las coincidencias y particularidades operativas que tienen con los números naturales.</u>
<u>NIVEL 5: Los estudiantes resuelven problemas en los que interpretan la sustracción de números negativos como la suma de un número con su opuesto y a la potenciación¹ como la multiplicación reiterada de un mismo número</u>	<u>Identifican nuevas propiedades (inverso aditivo, inverso multiplicativo, elemento neutro) en las operaciones con números negativos.</u>	<u>Resuelven problemas relacionados a optimización de repartos y a determinación de coincidencias.</u>	
<u>NIVEL 6: Los estudiantes resuelven problemas en los que identifican la radicación a partir de la extensión de la definición de potenciación para exponentes fraccionarios.</u>	<u>Identifica y relaciona las propiedades de la potenciación y la radicación en diversas situaciones.</u>		
<u>NIVEL 7: Los estudiantes demuestran las propiedades de las distintas operaciones empleando métodos analíticos, gráficos y razonamientos por el absurdo.</u>	<u>Resuelven situaciones en las que el uso de los logaritmos y sus propiedades permiten simplificar cálculos numéricos.</u>		

Comentario [J21]: En los niveles anteriores no hay referencia al tipo de conjunto numérico, no? Por qué?

Comentario [J22]: ¿qué diferencia hay entre “justificar” e “interpretar”?

Comentario [J23]: ¿ a partir de este nivel ya dejamos de lado el tema de la “justificación” e “interpretación”?

Comentario [J25]:

Comentario [J24]: A diferencia de la siguiente oración, aquí se habla de “propiedades de la adición” y no se señala de manera específica qué propiedades. En la segunda oración, entiendo que el canje es una estrategia que optimiza su proceso de restar....

Comentario [J26]: Revisar el uso de la oración “optimizan su cálculo escrito y mental” . Se usa irregularmente (inicio y fin de oración, entre paréntesis, a veces se señala y otras no, etc) y eso origina confusión.

Comentario [J28]: Acá no se hace alusión a l número de etapas de los cálculos, lo que sí se señala en el nivel 5. Por otro lado “el empleo de herramientas tecnológicas” se empieza a señalar aquí, luego se “funde” en el parafraseo de las primeras oraciones de los niveles siguientes y finalmente se incluye en el nivel 5 en la tercera oración

Comentario [J27]: No entiendo qué es lo que marca la complejidad en esta dimensión: el tipo de estrategias usadas o el tipo de operaciones sobre las que se aplican las estrategias? A veces se la da énfasis a uno en desmedro del otro...

Uso de las diferentes estrategias de cálculo

Capacidad para calcular empleando una variedad de estrategias o herramientas para efectuar cálculos tanto exactos como aproximados, seleccionando las estrategias más eficientes y accesibles para optimizar sus procesos.

<u>NIVEL 1: Utilizan las propiedades de la adición para optimizar sus estrategias de cálculo escrito y mental</u>	<u>Hallan la diferencia entre dos números haciendo uso del canje.</u>	<u>Calculan el doble y la mitad de un número empleando materiales concretos y representaciones gráficas.</u>	
<u>NIVEL 2: Optimizan su cálculo escrito y mental empleando las propiedades de la multiplicación.</u>	<u>Usan variadas estrategias de cálculo para efectuar adiciones y sustracciones con fracciones homogéneas.</u>	<u>Emplean herramientas tecnológicas para comprobar sus resultados.</u>	

¹ La potenciación se trabajará solo con exponentes naturales.

<p><u>NIVEL 3: Utilizan estrategias de cálculo (escrito y mental), estimación y herramientas tecnológicas para resolver situaciones que involucran varios pasos y más de una operación con números naturales, decimales o fraccionarios.</u></p>	<p><u>Usan la equivalencia y simplificación como estrategias de cálculo en operaciones con fracciones.</u></p>		
<p><u>NIVEL 4: Utilizan la notación científica, la estimación, las propiedades de las operaciones y herramientas tecnológicas al calcular con números positivos y negativos.</u></p>	<p><u>Usan los criterios de divisibilidad para descomponer números y calcular el MCM y MCD de números naturales.</u></p>		
<p><u>NIVEL 5: Utilizan las propiedades de la potenciación y la radicación para un cálculo más eficiente.</u></p>	<p><u>Identifican el ámbito numérico en el que una respuesta es apropiada para la situación propuesta.</u></p>	<p><u>Utilizan herramientas tecnológicas para cálculos de más de cuatro etapas.</u></p>	
<p><u>NIVEL 6: Optimizan y justifican sus cálculos a partir de la creación o adaptación de estrategias y el uso de herramientas tecnológicas al operar con números reales.</u></p>			

Comentario [J29]: Esto ya no está incluido en lo señalado en la primera oración?

Comentario [J30]: ¿qué propiedades?,

Comentario [J31]: ¿"cálculo más eficiente"? Eso es lo mismo que decir "optimizar cálculo escrito y mental". Todo ese cambio de parafraseo irregular, origina confusión.

Comentario [J32]: No es claro de qué manera esto es parte de la dimensión "uso de diferentes estrategias para el cálculo"

Comentario [J33]: Acá nuevamente no se refieren al tipo de estrategias y se pone énfasis en el tipo de números con los que se opera....confuso.

Resultados de la discusión:

Se observó que no había una secuencia, al menos no era transparente, entre un nivel y otro; inclusive en una misma dimensión era difícil justificar por qué el siguiente nivel tenía una mayor complejidad, sin que esto dependiera únicamente del objeto matemático involucrado.

Al respecto se discutió sobre la necesidad de identificar aspectos transversales en cada dimensión y procurar mantener una misma estructura en la redacción del progreso.

Esto se haría contemplado una progresión en los procesos de pensamiento que debían realizarse, así como también en los temas que debían tratarse.

En la reunión se decidió que los aspectos transversales a considerarse serían los siguientes:

En la dimensión 1: Comprensión de los números

Se debía contemplar el que el alumno sea capaz de dar razones para la selección de un determinado conjunto numérico, debía dar muestras de comprender el significado de los números y de sus equivalencias y finalmente debía identificar las relaciones que se pudieran establecer entre distintos conjuntos numéricos (considerando los conjuntos que haya estudiado hasta ese nivel).

En la dimensión 2: Comprensión de las operaciones

Se considerarían también tres elementos, siendo el primero el primero de ellos el que las operaciones adquieran significado, el segundo se refiere a comprender las propiedades de dichas operaciones, esto es, cómo la ampliación de los conjuntos numéricos preserva operaciones pero hace que aparezcan otras y finalmente el tercero hace referencia a ser capaz de establecer relaciones entre las operaciones, en particular el identificar cuándo una operación es la inversa de la otra.

En la dimensión 3: Cálculo numérico

Se consideraron inicialmente tres aspectos, el cálculo mental, el cálculo escrito y el uso de material concreto o de herramientas tecnológicas para realizar el cálculo. Cabe resaltar que esta propuesta fue luego modificada pues se observó que no describía la dimensión propiamente pues el tercer aspecto, por ejemplo, se refería al usar recursos y esto debía estar inmerso en la descripción pero no ser un eje.

Reunión de la semana del 2 de mayo

Objetivo: Revisar el mapa de pensamiento numérico que recogía la descripción anterior.

Durante dicha semana, la discusión se realizó de manera virtual. Producto de dichas reuniones, el equipo de estándares me hizo llegar una nueva versión del mapa de pensamiento numérico, con un formato distinto al que veníamos empleando pero que permitiría hacer un seguimiento a los aspectos descritos en cada dimensión.

A continuación se muestra dicho mapa, considerando las observaciones que les hice llegar:

Comprensión de los números

Capacidad para resolver situaciones problemáticas que impliquen dar razones de la utilidad de los distintos conjuntos numéricos, identificar las relaciones que se pueden establecer entre ellos, representar los números de manera equivalente ~~comprender el significado de los números, sus equivalencias~~ en el Sistema de Numeración Decimal e ~~identificar las relaciones que se pueden establecer entre ellos~~ identificar las relaciones que se pueden establecer entre esas representaciones.

Nota: Había una frase sobre la comprensión del significado de número que creo no es observable sino a través de estas actividades. Por otra parte, estoy separando lo que se refiere al conjunto numérico y a la representación en el sistema decimal.

Niveles	dar razones de la utilidad de los distintos conjuntos numéricos	comprender el significado de los números, sus equivalencias en el Sistema de Numeración Decimal	Identificar relaciones que se pueden establecer entre ellos
N1		Resuelve problemas de distintos contextos, que le demandan contar, comparar, ordenar, leer y representar gráficamente colecciones de hasta nueve objetos usando expresiones como uno/muchos/ pocos/ ninguno/ algunos/todos y más que/menos que.	
N2	Resuelve problemas de distintos contextos, en los que da razones sobre la utilidad de los números naturales.	Cuenta, compara, ordena, lee, escribe y establece equivalencias convencionales ² hasta las decenas.	
N3	Resuelve problemas de distintos contextos, en los que da razones sobre la utilidad de las fracciones para representar partes de un todo. <u>Habría que tener cuidado si</u>	Cuenta, compara, ordena, lee, escribe y establece equivalencias no convencionales ³ con números naturales hasta las unidades de millar.	Identifica fracciones que son equivalentes a números naturales.

² Ejem: 32 = 3D 2U

³ Ejem: 32 = 2D 12U

	<u>es que nos queremos referir a las fracciones como conjunto (que no son) o a la representación fraccionaria de los números racionales positivos (si es lo que se quiere decir). Corriendo el riesgo de que se cuestione el lenguaje, preferiría lo segundo porque matemáticamente es correcto.</u>		
N4	Resuelve problemas de distintos contextos, en los que da razones sobre la utilidad de los números decimales <u>(aquí habría que tener cuidado porque los números decimales no son un conjunto numérico; se tendría que hablar de la representación decimal de los números racionales positivos si es que a eso se refiere esta descripción)</u> en situaciones de medición y del sistema monetario.	Compara, ordena, lee, escribe y establece equivalencias convencionales y no convencionales <u>entre</u> números naturales hasta la unidad de millón y <u>con expresión</u> decimales hasta las centésimas. Interpreta la fracción como el cociente de dos números.	Identifica los números <u>(no diría números, sino expresiones)</u> decimales, las fracciones, los porcentajes y los números naturales <u>¿?</u> como elementos de un mismo conjunto numérico. <u>Aquí haría la misma observación, sería mejor decir “como representaciones distintas de un mismo conjunto de números: los racionales positivos”.</u>
N5	Resuelve problemas de distintos contextos, en los que justifica la utilidad de números negativos en situaciones que <u>se</u> requiere <u>emplear a</u> valores menores que el cero, <u>justificando así el uso del conjunto de formando así el conjunto de los</u> números racionales.	Compara, ordena, escribe y establece equivalencias entre números racionales. Interpreta la fracción como la razón de dos magnitudes.	Identifica los números positivos y negativos, en sus distintas formas (enteros, decimales, fracciones, porcentajes y notación científica), como parte del conjunto de los números racionales.
N6	Resuelve problemas <u>de distintos contextos,</u> en los que justifica la utilidad de los números irracionales en situaciones de contexto algebraico y geométrico. <u>Ya que mencionan el tipo de contexto al final, no es necesario repetirlo al inicio.</u>	Compara, ordena y escribe números irracionales.	Identifica los números racionales e irracionales como conjuntos numéricos que forman el conjunto de los números reales.
N7	Resuelve problemas <u>de distintos contextos,</u> en los que justifica la utilidad de los números reales en situaciones de contexto algebraico y geométrico. <u>Ya que mencionan el tipo de contexto al final, no es necesario repetirlo al inicio.</u>	Compara, ordena y escribe números reales.	Demuestra <u>(¿No sería mejor justifica con ejemplos?)</u> la relación de inclusión entre los distintos conjuntos numéricos.

Comprensión de las operaciones

Capacidad para resolver situaciones problemáticas que impliquen reconocer el significado de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmos, de sus propiedades y de cómo se relacionan dichas operaciones (quitaría lo que sigue: en los distintos conjuntos numéricos); sería mejor hacer referencia a cuáles tiene sentido en determinado conjunto numérico.

En la primera columna habría que uniformizar con lo anterior porque aquí se dice “situaciones problemáticas”, mientras que en el cuadro anterior decía “problemas”.

NIVELES	Significado de las operaciones y características de las situaciones	propiedades	Relaciones entre las operaciones
N1	Resuelve situaciones problemáticas relacionadas con “agrupar” “juntar” o “agregar” y “quitar” o “disminuir” elementos concretos de una o más colecciones de objetos que tienen una característica común.		
N2	Resuelve situaciones problemáticas de carácter aditivo reconociendo los casos de combinación y cambio. <u>¿No habría que definir “carácter aditivo” así como se hace con las de carácter multiplicativo?</u>	Justifican que las propiedades conmutativa y asociativa se verifican en la adición y no en la sustracción.	Identifica la sustracción como proceso inverso a la adición y a la multiplicación como adición reiterada.
N3	Resuelve situaciones problemáticas de carácter aditivo reconociendo casos de igualación y comparación, así como situaciones multiplicativas referidas a la proporcionalidad simple y al producto cartesiano.	Justifica mediante la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición el procedimiento para multiplicar dos números.	Identifica la división como una sustracción reiterada y como proceso inverso a la multiplicación.
N4	Resuelve situaciones problemáticas, reconociendo los casos de comparación multiplicativa ⁴ ; así como situaciones que involucren la <u>representación fraccionaria (NO: fracción) de un número natural ¿solo natural? Según lo anterior parece que no debería restringirse a los naturales).</u>	Justifica mediante las propiedades del elemento neutro aditivo y multiplicativo la invariabilidad de las sumas y productos. <u>Parece que falta considerar el trabajo con operaciones que involucren representaciones fraccionarias y decimales (en cuanto a identificar propiedades)</u>	Identifica las coincidencias y particularidades operativas que tienen los números naturales con respecto a los decimales <u>(recordar que no son números decimales sino representaciones decimales).</u>
N5	Resuelve situaciones problemáticas de números enteros que involucren la sustracción, así como diversas situaciones donde se aplique de manera explícita o implícita la potenciación y aquellas otras donde tenga que encontrarse la fracción de la fracción de un entero.	Justifica mediante las propiedades del inverso aditivo, inverso multiplicativo y del elemento absorbente de la multiplicación, el procedimiento para simplificar expresiones numéricas. <u>Aquí habría que tener cuidado porque quizás se está pensando que esto se hará para resolver ecuaciones; en ese caso, lo que se quiere es escribir de manera equivalente algunas expresiones más que expresiones</u>	Identifica la operación de potenciación ⁵ como la multiplicación reiterada de un mismo número.

⁴ Abarca situaciones de comparación de aumento, disminución y de igualación.

⁵ La potenciación se trabajará solo con exponentes naturales.

		<u>numéricas.</u>	
N6	Resuelve situaciones problemáticas con números racionales e irracionales reconociendo a la radicación como la extensión del significado de potenciación para exponentes fraccionarios.	Justifica mediante las propiedades de la potenciación y la radicación, el procedimiento para simplificar expresiones numéricas.	Identifica la radicación como proceso inverso a la potenciación
N7	Resuelve situaciones problemáticas con números reales reconociendo a los logaritmos como una operación que permite simplificar cálculos numéricos. <u>Esto no me queda claro. ¿por qué se enfatiza tanto en esta operación? ¿Se ha pensado en al práctica como se definirá el logaritmo? Sería bueno hacerlo para saber si se requerirá la exponenciación o a lo mejor, incluso el paso al límite.</u>	Demuestra <u>(no sé si es pertinente este nivel de rigurosidad, habría que pensar en ejemplos concretos de cómo es que esto se haría porque para demostrar debería valerse de verdades previamente presentadas, o quizás se está pensado en que justifique en casos con números específicos)</u> las propiedades de las distintas operaciones empleando métodos analíticos y razonamientos por el absurdo.	Identifica a los logaritmos como una operación relacionada a la potenciación y a la radicación. <u>¿En qué sentido? No me queda clara esa relación.</u> <u>¿No se trabajará con la exponenciación? Si finalmente decidimos incluir los logaritmos, creo que sería natural considerar la exponenciación ya ambas son operaciones inversas y justamente ese es un aspecto que se quiere resaltar: la relación entre las operaciones.</u>

Cálculo numérico

Capacidad para mejorar gradualmente sus procesos de cálculo, ya sea mental, escrito, con material concreto o con herramientas tecnológicas, al resolver problemas de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmos (seguiría la observación sobre la exponenciación) en los distintos conjuntos numéricos.

NIVELES	Cálculo mental	Calculo escrito	Uso de material concreto o con herramientas tecnológicas para el cálculo
N1			Usa material concreto para agrupar colecciones de objetos que totalicen hasta 9.
N2	Calcula mentalmente sumas y restas con números de una cifra.	Calcula por escrito adiciones y sustracciones con canje.	Usa materiales concretos y representaciones gráficas para calcular el doble, el triple y la mitad de un número.
N3	Calcula mentalmente el doble, triple, mitad y multiplicaciones por diez de números de hasta dos dígitos.	Calcula por escrito adiciones y sustracciones de fracciones con igual denominador; así como multiplicaciones donde el multiplicador tiene hasta dos cifras y divisiones exactas donde el divisor tiene una cifra.	Usa herramientas tecnológicas para encontrar regularidades aditivas y multiplicativas.
N4	Calcula mentalmente multiplicaciones de pares de números naturales hasta 12 por 12.	Calcula por escrito expresiones numéricas que involucran varios pasos y más de una operación <u>¿de qué operaciones</u>	Usa herramientas tecnológicas para encontrar equivalencias entre fracciones y decimales.

		<u>se está hablando?</u> con números naturales, decimales o fraccionarios <u>(la misma observación sobre que no son tipos de números sino representaciones).</u>	
N5	Calcula mentalmente situaciones de dos etapas y con más de una de las cuatro operaciones básicas con números naturales.	Calcula por escrito expresiones numéricas que involucran varios pasos y más de dos operaciones <u>¿de qué operaciones se está hablando?</u> con números racionales, <u>Mejor separar en otro párrafo:</u> así como aquellas situaciones donde se requiere de múltiplos y divisores.	Usa herramientas tecnológicas para identificar que al multiplicar o dividir con decimales, el producto o cociente, no siempre es mayor a uno de los factores o es menor al dividendo.
N6	Calcula mentalmente los cuadrados de los veinte primeros números naturales y las raíces cuadradas que correspondan a esos valores.	Calcula por escrito expresiones numéricas que involucran potencias y raíces con números reales.	Usa herramientas tecnológicas para identificar los efectos de multiplicar o dividir por números entre 0 y 1. <u>¿Se refieren a explorar lo que ocurre cuando se divide entre números cada vez más cercanos a cero? ¿o exactamente en cero? Porque en ese caso la calculadora dirá "error" y no parece que haya algún beneficio o que pueda explicar por qué ocurre esto.</u>
N7	Calcula mentalmente porcentajes en situaciones comerciales cotidianas.	Calcula por escrito expresiones numéricas que involucran logaritmos y tasas de interés.	Usa herramientas tecnológicas para hacer cálculos relacionados a modelos financieros <u>¿que involucran qué tipo de términos: interés compuesto,? ¿Y no habrá otros contextos también interesantes? .</u>

La expresión "calcula por escrito" se refiere a que realiza operacionesempleando para ello lápiz y papel? Me parece mejor el realizar operaciones que el calcular, y esto podría considerarse en toda la propuesta.

Reunión del 11 de mayo

Objetivo: Discutir las observaciones que había recibido el equipo de estándares de matemática respecto a la definición de palabras claves en cada dimensión.

A raíz de las observaciones realizadas en el mapa descrito en la página anterior, la coordinadora del equipo de estándares solicitó mantener una reunión con la asesora nacional para aclarar algunos aspectos.

En dicha sesión se discutieron sobre los siguientes aspectos:

- Cuando se hace referencia a la dimensión comprender los números se debe poner énfasis a la naturaleza del número según sea el conjunto numérico al que pertenece y también a la representación que se esté empleando para describirlo. Se debe tener especial cuidado a referirse a estos dos aspectos con las palabras adecuadas; así por ejemplo, se insistió en que expresiones como *números decimales* era incorrecta. Lo correcto sería decir *números racionales en su representación decimal*.
- Otro aspecto importante fue el que se refería a repensar el nivel 7. Tal como estaba la propuesta se estaba considerando un nivel en el que el estudiante debía dominar más temas matemáticos. La propuesta que se hizo al equipo fue en otro sentido: considerar el nivel 7 como un nivel en donde se ubicaría el estudiante que fuera capaz de establecer relaciones entre los objetos matemáticos involucrados hasta el nivel previo. Esta sugerencia fue aceptada y se planteó entonces reformularlo. Así por ejemplo, ya no se justificaría la referencia a la operación logaritmo en el nivel 7 sino que se pediría al estudiante que sea capaz de identificar qué propiedades satisfacen determinadas operaciones y cuáles no, y cómo esto evoluciona a medida que los conjuntos numéricos se amplían.
- También se discutió si era pertinente señalar que el estudiante debía *demostrar propiedades* para estar en el nivel 7 (dimensión de comprensión de las operaciones). La razón para esta observación fue que esto implicaría un tratamiento formal del objeto matemático *número real* y esto no concuerda con lo implementado en la educación básica.

Luego de este encuentro, el equipo de estándares reformuló el mapa de pensamiento numérico de la siguiente manera:

Nivel 7	Resuelve problemas en los que justifica la utilidad de los números reales en situaciones de contexto algebraico y geométrico. Compara, ordena y escribe números reales. Justifica la relación de inclusión entre los distintos conjuntos numéricos, así como las propiedades que se cumplen en unos conjuntos y en otros no. Resuelve problemas con números reales en los que emplea los distintos significados de las operaciones. Justifica qué propiedades cumplen las operaciones en los distintos conjuntos numéricos. Calcula mentalmente porcentajes en situaciones comerciales cotidianas. Realiza por escrito y con herramientas tecnológicas, operaciones relacionadas a interés compuesto.
Nivel 6	Resuelve problemas en los que justifica la utilidad de los números irracionales en situaciones de contexto algebraico y geométrico. Compara, ordena y escribe números irracionales. Identifica los números racionales e irracionales como conjuntos numéricos que forman el conjunto de los números reales. Resuelve problemas con números racionales e irracionales reconociendo a la radicación como la extensión del significado de potenciación para exponentes fraccionarios. Justifica que las propiedades que se verifican en la potenciación tienen su equivalente en la radicación. Identifica la radicación como proceso inverso a la potenciación. Calcula mentalmente los cuadrados de los veinte primeros números naturales y las raíces cuadradas que correspondan a esos valores. Realiza por escrito y con herramientas tecnológicas, operaciones que involucran potencias y raíces con números reales.
Nivel 5	Resuelve problemas de distintos contextos, en los que justifica la utilidad de números negativos en situaciones que se requiere emplear valores menores que el cero, justificando así el uso del conjunto de números racionales. Compara, ordena, escribe y establece equivalencias entre números racionales. Interpreta la fracción como la razón de dos magnitudes. Identifica los números positivos y negativos, en sus distintas formas (enteros, decimales, fracciones, porcentajes y notación científica), como parte del conjunto de los números racionales. Resuelve problemas de números racionales que involucren la sustracción, así como diversas situaciones donde se aplique de manera explícita o implícita la potenciación y aquellas otras donde tenga que encontrarse la fracción de la fracción de un entero. Justifica que la propiedad del inverso aditivo generaliza la adición. Identifica la operación de potenciación ⁶ como la multiplicación reiterada de un mismo número. Calcula mentalmente situaciones de dos etapas y con más de una de las cuatro operaciones básicas con números naturales. Realiza por escrito y con herramientas tecnológicas, operaciones que involucran varios pasos y más de dos operaciones con números racionales así como aquellas situaciones donde se requiere de múltiplos y divisores.
Nivel 4	Resuelve problemas de distintos contextos, en los que da razones sobre la utilidad de la representación decimal de un número en situaciones de medición y del sistema monetario. Compara, ordena, lee, escribe y establece equivalencias convencionales y no convencionales entre números naturales hasta la unidad de millón y con expresiones decimales hasta las centésimas. Interpreta la fracción como el cociente de dos números. Identifica expresiones decimales, las fracciones, los porcentajes y los números naturales como representaciones distintas de un mismo conjunto de números: los racionales positivos. Resuelve problemas de comparación multiplicativa, así como problemas que involucren el trabajo con fracciones y que le demanden identificar la división de fracciones como un producto del dividendo con el inverso multiplicativo del divisor. Justifica que las cuatro operaciones con números racionales positivos tienen un elemento neutro que asegura la invariabilidad de sus resultados; así como que al multiplicar o dividir con racionales positivos, el producto o cociente, no siempre es mayor a uno de los factores o es menor al dividendo. Identifica las coincidencias y particularidades operativas que tienen los números naturales con respecto a las representaciones decimales. Calcula mentalmente multiplicaciones de pares de números naturales hasta 12 por 12. Realiza por escrito y con herramientas tecnológicas, operaciones que involucran varios pasos y más de una operación con números naturales, representaciones decimales o fraccionarias.

⁶ La potenciación se trabajará solo con exponentes naturales.

Nivel 3	Resuelve problemas de distintos contextos, en los que da razones sobre la utilidad de las fracciones para representar partes de un todo. Cuenta, compara, ordena, lee, escribe y establece equivalencias no convencionales ⁷ con números naturales hasta las unidades de millar. Identifica fracciones que son equivalentes a números naturales. Resuelve problemas aditivos de igualación y comparación, así como problemas multiplicativos referidos a la proporcionalidad simple y al producto cartesiano. Justifica que las propiedades conmutativa y asociativa se verifican en la multiplicación y no en la división. Identifica la división como una sustracción reiterada y como proceso inverso a la multiplicación. Calcula mentalmente el doble, triple, mitad y multiplicaciones por diez de números de hasta dos dígitos. Realiza por escrito y con herramientas tecnológicas, operaciones de adición y sustracción de fracciones con igual denominador; así como multiplicaciones donde el multiplicador tiene hasta dos cifras y divisiones exactas donde el divisor tiene una cifra.
Nivel 2	Resuelve problemas de distintos contextos, en los que da razones sobre la utilidad de los números naturales. Cuenta, compara, ordena, lee, escribe y establece equivalencias convencionales ⁸ hasta las decenas. Resuelve problemas aditivos de combinación y cambio. Justifica que las propiedades conmutativa y asociativa se verifican en la adición y no en la sustracción. Identifica la sustracción como proceso inverso a la adición y a la multiplicación como adición reiterada. Calcula mentalmente sumas y restas con números de una cifra. Realiza operaciones de adición y sustracción con canje. Calcula el doble, el triple y la mitad de un número con apoyo de material concreto y gráfico.
Nivel 1	Resuelve problemas de distintos contextos, que le demandan contar, comparar, ordenar, leer y representar gráficamente colecciones de hasta nueve objetos usando expresiones como uno/muchos/pocos/ninguno/ algunos/todos y más que/menos que. Resuelve problemas relacionados con “agrupar” “juntar” o “agregar” y “quitar” o “disminuir” elementos concretos de una o más colecciones de objetos que tienen una característica común. Realiza agrupaciones de colecciones de objetos que totalicen hasta 9.

Entendiendo que cada dimensión del mapa de Pensamiento numérico podría identificarse en cada nivel asociando a cada texto coloreado en rojo la dimensión 1, en color verde la dimensión 2 y en color celeste la dimensión 3. Y recordando además el significado de cada una de ellas:

Comprensión de los números

Capacidad para resolver situaciones problemáticas que impliquen dar razones de la utilidad de los distintos conjuntos numéricos, comprender el significado de los números, sus equivalencias en el Sistema de Numeración Decimal e identificar las relaciones que se pueden establecer entre ellos.

Comprensión de las operaciones

Capacidad para resolver problemas que impliquen reconocer el significado de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación, de cómo se relacionan dichas operaciones y de las propiedades operativas que cumplen y que tienen sentido en determinado conjunto numérico.

Cálculo numérico

⁷Ejem: 32 = 2D 12U

⁸Ejem: 32 = 3D 2U

Capacidad para efectuar procesos de cálculo, ya sea mental, escrito, con material concreto o con herramientas tecnológicas, al resolver problemas de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación en los distintos conjuntos numéricos.

Semana del 16 de mayo:

Objetivo: Garantizar que el documento marco justificativo tenga los elementos teóricos suficientes que justifiquen la necesidad de considerar cuatro mapas de progreso.

Se solicitó a la asesora nacional que revisará la última versión del documento marco justificativo.

Aportes realizados para justificar cada mapa de progreso

En el campo de la investigación en Didáctica de la matemática, se pueden encontrar a diversos autores que dan cuenta de los distintos tipos de pensamiento que intervienen cuando se aprende matemáticas. A continuación se señalarán algunas ideas que pueden emplearse para el documento marco justificativo.

Sobre Pensamiento Numérico:

Según Rico y Castro, se debe tener en cuenta que los distintos conjuntos numéricos tratados en la educación básica se pueden agrupar según correspondan a una aritmética discreta (de unidades indivisibles) o a una aritmética continua (donde la unidad se divide). Esta organización matemática está asociada a diferentes funciones cognitivas. En ese sentido, resulta de vital importancia considerar que la progresión de los aprendizajes referidos a los números irá de la mano con el tratamiento matemático de los conjunto numéricos que contempla dicha clasificación.

Más aún, y siguiendo a Godino, el desarrollo de un sentido numérico en los estudiantes corresponderá a un dominio reflexivo de relaciones numéricas que se puede expresar en capacidades. Dicho dominio se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones, junto con la capacidad para usar esta comprensión de manera flexible para emitir juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles para resolver problemas complejos. Indica poseer una competencia que se desarrolla gradualmente y en ese sentido es pertinente asociar esta evolución a diferentes niveles.

De otro lado, se tiene como respaldo también el documento del NCTM que considera cinco componentes para caracterizar el sentido de número. Estos son:

El significado del número, las relaciones numéricas, el tamaño de los números, las operaciones con números y los referentes para números y cantidades.

Nota: Creo que, de alguna manera, los cuatro primeros elementos están presentes en la propuesta que se hace en el documento peruano.

Sobre Pensamiento Variacional:

Según Cantoral, el pensamiento variacional está relacionado con fenómenos de aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social. Tiene asociado funciones cognitivas desarrolladas mediante el uso de conceptos y propiedades del cambio, así como problemas y situaciones que se abordan y resuelven mediante estructuras variacionales.

Sobre Pensamiento Geométrico:

Por ejemplo en la tesis de Jaime se pueden extraer ideas como esta:

Teniendo en cuenta el modelo Van Hiele, se concibe el aprendizaje de la geometría como un proceso en el que se debe pasar por distintos niveles de pensamiento. La adquisición de los niveles es progresiva. Los niveles que menciona el modelo no están asociados a la edad sino a un conjunto de tareas que los estudiantes pueden hacer, a un lenguaje asociado a cada nivel que logren manejar y al significado que logren atribuir a los símbolos.

El modelo Van Hiele ha servido de base a los estándares de geometría del NCTM, así como a diversas investigaciones en Didáctica de la Matemática para el aprendizaje de determinados objetos geométricos. Así, resultará especialmente útil recurrir a estos trabajos para la definición de los estándares peruanos del pensamiento geométrico.

Sobre Pensamiento Aleatorio:

Para complementar la descripción del pensamiento aleatorio, se podrían tomar algunas ideas dadas por Batanero. Una de ellas sería que la aleatoriedad debería asociarse a varios conceptos (experimento, suceso, espacio muestral, probabilidad, etc.) y procedimientos matemáticos que se pueden aplicar en muchas situaciones. Más que una característica que puede tener o no un objeto, la aleatoriedad debería entenderse como una forma concebir una situación y por lo tanto estaría asociado a una forma de pensamiento.

Decidir cuándo el cálculo de probabilidades es más conveniente o adecuado para una determinada situación que la aplicación de otros modelos matemáticos es parte de un trabajo de modelización que debe fomentarse en la educación básica y que tiene niveles de progreso.

Para la parte de gestión de datos se pueden encontrar ideas en el libro de Batanero, Didáctica de la Estadística.

En la última sesión de esta asesoría, realizada el 23 de mayo, se discutieron aspectos relacionados con la guía de evaluación del mapa de progreso que se entregó al asesor internacional y también la posibilidad de expresar los aprendizajes de una manera más general-global, cuando fuera posible en el mapa de progreso elaborado de pensamiento numérico.

Documentos revisados:

Cantoral, R. (2004) Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1-9)

Rico, L. y Castro, E. Pensamiento numérico en educación secundaria obligatoria (no tengo más datos del artículo pero está en Internet)

Godino, J., Font, V. Konic, P. y Wilhelmi, M. El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números que se encuentra en

Cardeñoso, J.M: y Peñas, M. (2009) Investigación en el aula de Matemáticas. Sentido Numérico (pp. 117-184)

Jaime, A. (1993) *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele. La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* Tesis doctoral. Universidad de Valencia.

Batanero, C. y Serrano, L. (1995) La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *Revista UNO*, 5, 15-28.